BIBLIOTHECA
SCRIPTORUM GRAECORUM
ET ROMANORUM
TEUBNERIANA

EUCLIDES

ELEMENTA

EDIDIT

I. L. HEIBERG

III

LIPSIAE
IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

DIE HELLENISCHE KULTUR

DARGESTELLT VON

FRITZ BAUMGARTEN, FRANZ POLAND, RICHARD WAGNER

Mit 7 farbigen Tafeln, 2 Karten und gegen 400 Abbildungen im Text und auf 2 Doppeltafeln

(X u. 494 S.) gr. 8. 1905. geh. *M* 10.—, in Leinw. geb. *M* 12.—

Dem Bedürfnis nach einer zusammenfassenden Darstellung der griechischen und (in einem zweiten in Vorbereitung befindlichen Bande) der römischen Kultur in weiterem Umfange, als sie bisher vorliegt, soll dies Werk Rechnung tragen. Die Verfasser, die sämtlich im praktischen Schuldienst stehen, haben es als ihre Aufgabe angesehen, die gesicherten Ergebnisse der neueren Forschung in einer für jeden Gebildeten faßlichen und lesbaren Form darzubieten, unter besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse und der Ergebnisse des Unterrichts in den Oberklassen unserer höheren Schulen. Dem geschriebenen Wort tritt ergänzend und weiterführend ein reichhaltiger Bilderschmuck zur Seite, der um so weniger fehlen durfte, je lebendiger und unmittelbarer gerade das Kulturleben des Altertums uns durch seine Denkmäler veranschaulicht wird.

„Ein Buch, das [illegible]" (Lehrproben und Lehrgänge [illegible])

„Das Buch [illegible] Kultur." (Straßburger Post [illegible])

EUCLIDIS

OPERA OMNIA.

EDIDERUNT

I. L. HEIBERG ET H. MENGE.

LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXVI.

Euclides

EUCLIDIS

ELEMENTA.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST

I. L. HEIBERG,

DR. PHIL.

UOL. III.

LIBRUM X CONTINENS.

LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXVI.

RP

LIPSIAE: TYPIS B. G. TEUBNERI.

PRAEFATIO.

Praeter codices solitos PBFVb, quos ipse contuli, nisi quod cod. Bodl. B ab initio usque ad finem definitionum alt. p. 136, 19 beneuolenter conferendum suscepit G. A. Stewart, u. d. Oxoniensis, in hoc libro X uti mihi licuit palimpsesto cod. Musei Britannici Add. 17211 (L), de quo cfr. uol. IV p. VI; continet

X prop. 15 p. 44, 12 *μετρήσει* ad finem prop.
X prop. 16 p. 46, 2 (*μέγε*)*θος* — p. 46, 8 *ὅτι*.
p. 46, 17 (*με*)*τρεῖ* ad finem prop.
X, 16 lemma p. 46, 23 *-μον ἐλλεῖπον* ad finem.
X prop. 31 p. 92, 19 (*μέ*)*σαι* ad finem prop.
X prop. 32 totam.
X prop. 32 lemma ab initio ad p. 96, 20 *ὅλῳ*.
X prop. 80 p. 240, 9 *δυνατόν* ad finem prop.
X prop. 81 ab initio ad p. 244, 10 *ὑπό*.
X prop. 112 p. 358, 19 *BΔ* ad finem prop.
X prop. 113 ab initio ad p. 362, 19 *οὕτως*.

In appendicem hic, ut semper, ea sola recepi, quae in uno saltem meorum codicum in textu legebantur; quare in mea editione quaedam eorum, quae Augustus in app. V habet, frustra quaeras; sunt enim scholia marginalia, quae in uol. V suo ordine edentur. Prolegomena critica quominus uel huic uel quarto uolumini

praemitterem, sicuti constitueram, prohibuit ratio scholiorum, quae quinto uolumine comprehendentur. nam cum inde non pauca subsidia ad codices aestimandos peti posse uiderem, statui iis demum editis ad prolegomena illa adcedere.

Scrib. Hauniae mense Nouembri MDCCCLXXXV.

I. L. Heiberg.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ.

ι'.

Ὅροι.

α'. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

β'. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχηται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.

γ'. Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.

δ'. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητόν, καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα ῥητά, τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα ἄλογα καλείσθω, καὶ αἱ δυνάμεναι

Ad deff. cfr. Hero deff. 128—129, Anonymus Hultschii p. 256, Martianus Capella VI, 718.

Εὐκλείδου στοιχείων ῑ PV, Εὐκλείδου στοιχείων τῆς Θέωνος ἐκδόσεως ῑ F, Εὐκλείδου στοιχείων ῑ τῆς Θέωνος ἐκδόσεως b. 1. ὅροι] om. PFV, ὅροι τοῦ ῑ b, ὅροσ τοῦ ῑ B. numeros om. codd. 5. Ante σύμμετροι ras. 1 litt P. 8. ἐνδέχεται bφ. 9. προστεθείσῃ b et e corr. F. 10. Post εὐθείᾳ add. Theon: τουτέστιν ἀφ' ἧς θέσει τὰ μέτρα τό τε πηχυαῖον καὶ τὸ παλαιστιαῖον καὶ τὸ δακτυλιαῖον ἢ τὸ ποδιαῖον λαμβάνεται (BFVb).

Liber X.

Definitiones.

1. Magnitudines commensurabiles uocantur, quas eadem mensura metiri licet, incommensurabiles autem, quarum communis mensura inueniri nequit.

2. Rectae potentia commensurabiles sunt, ubi quadrata earum eadem mensura metiri licet, incommensurabiles autem, ubi nullum spatium communis quadratorum earum mensura inueniri potest.

3. His suppositis demonstratur, rectas numero infinitas esse datae rectae commensurabiles et incommensurabiles partim longitudine tantum, partim potentia quoque. iam data recta rationalis uocetur, et quae ei commensurabiles sunt siue longitudine potentiaque siue potentia tantum, rationales, quae autem ei incommensurabiles sunt, irrationales uocentur.

4. Et quadratum datae rectae rationale uocetur, et quae ei commensurabilia sunt, rationalia, quae autem ei incommensurabilia sunt, irrationalia, et rectae, quae

---

πλήθει] om. F. *σύμμετροί τε καί*] supra scr. m. rec. P. 11. *μόνον, αἱ δὲ*] om. Theon (BFVb). 12. Post *δυνάμει* add. Theon: *αἱ δὲ δυνάμει μόνον* (BFVb). *προστεθεῖσα* b et e corr. F. 14. *σύμμετροι* b, corr. m. rec.; deinde add. Theon: *κατὰ τὸ συναμφότερον* (*συν-* om. b), *τουτέστιν* (*καὶ* del. F) *μήκει καὶ δυνάμει* (BFVb); idem P mg. m. 1 pro scholio. 16. *προστεθείσης* b et e corr. F. 17. *ῥητά*] om. F. 18. Ante *ἄλογα* add. *κατὰ τὸ συναμφότερον* F; idem P mg. m. 1 pro scholio. *καλείσθωσαν* Theon (BFVb).

αὐτὰ ἄλογοι, εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί, εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

α΄.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ *ΑΒ*, *Γ*, ὧν μεῖζον τὸ *ΑΒ*· λέγω, ὅτι, ἐαν ἀπὸ τοῦ *ΑΒ* ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ *Γ* μεγέθους.

Τὸ *Γ* γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ *ΑΒ* μεῖζον. πεπολλαπαλσιάσθω, καὶ ἔστω τὸ *ΔΕ* τοῦ μὲν *Γ* πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ *ΑΒ* μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ *ΔΕ* εἰς τὰ τῷ *Γ* ἴσα τὰ *ΔΖ*, *ΖΗ*, *ΗΕ*, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ *ΑΒ* μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ *ΒΘ*, ἀπὸ δὲ τοῦ *ΑΘ* μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ *ΘΚ*, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ *ΑΒ* διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ *ΔΕ* διαιρέσεσιν.

Ἔστωσαν οὖν αἱ *ΑΚ*, *ΚΘ*, *ΘΒ* διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς *ΔΖ*, *ΖΗ*, *ΗΕ*· καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ *ΔΕ* τοῦ *ΑΒ*, καὶ ἀφῄρηται ἀπο μὲν τοῦ *ΔΕ* ἔλασσον τοῦ ἡμίσεως τὸ *ΕΗ*, ἀπὸ δὲ τοῦ *ΑΒ* μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ

1. ἄλογα V, corr. m. 2. Deinde add. καλείσθωσαν Theon (BFVb). 2. ἴσαι φ. 5. ἐκκειμένων] ante ἀνίσων add. B mg. m. 1. 8. ἀεί] αἰεί F, ἀεὶ ἄν V? γίνηται V (η e corr.), γίγνεται b. ληφθήσεται Vb. 9. ἐστιν Theon (BFVb).

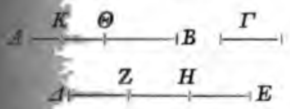
quadratae iis aequales sunt, irrationales uocentur, i quadratis ipsa latera, in ceteris figuris rectilineis ea ex quibus quadrata illis aequalia construi possunt.

I.

Propositis duabus magnitudinibus inaequalibus si a maiore plus quam dimidium subtrahitur et a reliqua plus quam dimidium, et hoc semper fit, magnitudo relinquetur, quae minor erit proposita magnitudine minore.

Sint duae magnitudines inaequales AB, Γ, quarum maior sit AB. dico, si ab AB plus quam dimidium subtrahatur et ab reliqua plus quam dimidium, et hoc semper fiat, magnitudinem relictum iri, quae minor sit magnitudine Γ.

Nam Γ multiplicata aliquando magnitudine AB maior erit [cfr. V def. 4]. multiplicetur et ΔE magnitudinis Γ multiplex sit, eadem autem $> AB$, et ΔE in partes magnitudini Γ aequales ΔZ, ZH, HE diuidatur, et ab AB plus quam dimidium subtrahatur $B\Theta$, ab $A\Theta$ autem plus quam dimidium ΘK, et hoc semper fiat, donec in AB totidem diuisiones fiant, quot in ΔE.



ἔλαττον F. τοῦ] om. V? ἐγκειμένου b. ἐλάττονος F. 12. δὴ ὅτι b. 13. καὶ — ἥμισυ] om. P. καί] (prius) καὶ ἀπὸ V. 14. αἰεί F. γίγνεται V, γίνηται b. ληφθήσεται V. ἐστιν V. ἔλαττον F. 16. γάρ] ἄρα F. AB μεγέθους Theon (BFVb). 19. εἰς] m. rec. B. ἀπό] om. V. 21. γινέσθω P. 23. ταῖς] corr. ex ται m. rec. b. 24. οὖν] om. b. διαιρέσις P, corr. 25. HZ F. ἐστιν F. 26. τοῦ] (alt.) post ins. F. 27. ἡμίσεος b, ἡμίσους V. τό] corr. ex τοῦ F. τὸ ἥμισυ] τοῦ ἡμίσεως F, τοῦ ἡμίσεος BVb.

τὸ ΒΘ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μεῖζόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφήρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ.

Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα.

β΄.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΖΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ,

---

2. ἐστιν] comp. Fb, ἐστι BV. ἐστι] om. V. 4. η τὸ ἥμισυ] τοῦ ἡμίσεος BVb, τοῦ ἡμίσεως F. 7. καταλέλειπται Bb. 8. ἐγκειμένου b. ἐλάττονος F. 10. ἡμίσυη P, ἡμίσεα V. Seq. demonstr. altera, u. app. 12. ἐκκειμένων] mg. m. 1 P. ἀνθυφαιρομένου V, corr. m. 2. 13. αἰεί F. ἐλάττονος F. 15. τά] τό F, corr. m. 2. 16. καὶ ὄντος Theon (BFVb). 17. ἐλάττονος F. ἀνθυφαιρομένου V, corr. m. 2. αἰεί F. 19. ἐστιν P. 21. ἐστι] supra scr. -αι V. τι] om. F. 23.

diuisiones igitur AK, $K\Theta$, ΘB numero aequales sint diuisionibus ΔZ, ZH, HE. et quoniam $\Delta E > AB$, et a ΔE minus quam dimidium subtractum est EH, ab AB autem plus quam dimidium $B\Theta$, erit $H\Delta > \Theta A$. et quoniam $H\Delta > \Theta A$, et ab $H\Delta$ dimidium subtractum est HZ, a ΘA autem plus quam dimidium ΘK, erit $\Delta Z > AK$. uerum $\Delta Z = \Gamma$. quare etiam $\Gamma > AK$. ergo $AK < \Gamma$.

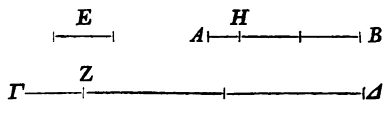
Ergo ex magnitudine AB relinquitur magnitudo AK minor proposita magnitudine minore Γ; quod erat demonstrandum.

Similiter autem demonstrabitur, etiam si, quae subtrahuntur, dimidia sunt.

II.

Si ex duabus magnitudinibus inaequalibus minore semper uicissim a maiore subtracta reliquum nunquam praecedentem magnitudinem metitur, magnitudines incommensurabiles erunt.

Datis enim duabus magnitudinibus inaequalibus AB, $\Gamma\Delta$ minor sit AB, et minore semper uicissim a maiore subtracta reliquum ne unquam praecedentem magnitudinem metiatur. dico, magnitudines AB, $\Gamma\Delta$ incommensurabiles esse.



Nam si commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur, si fieri potest, et sit E. et AB magnitudinem $Z\Delta$ metiens se ipsa minorem relinquat

---

$Z\Delta$] mut. in $\Gamma\Delta$ m. 2 B, m. rec. b; ΔZ e corr. PV. ἐλάσ-σονα P, sed α del.

τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ το ΔΖ μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΖΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων, καὶ τὰ ἑξῆς.

γ΄.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. εἰ μὲν οὖν μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό, τὸ ΑΒ ἄρα τῶν

1. ΒΗ] in ras. P, mut. in ΒΑ B m. 2, in ΑΒ m. rec.; Η e corr V. 2. γιγνέσθω F. ληφθῇ BVb. 3. ἔσται P. ἔλαττον F. εἰλήφθω V. 4. τό] (pr.) τοῦ F. 5. ΖΔ P. ΖΔ] mut. in ΔΖ V, ΔΖ BFb. 8. ΒΗ] ΗΒ P. μετρεῖ] (prius) supra m. 2 F. 10. ἐστίν] om. V. 11. Post τι ras. 1 litt. V. ἐστίν P. 13. μεγεθῶν ἐκκειμένων F. καὶ τὰ ἑξῆς] ὅπερ ἔδει δεῖξαι V (post ἑξῆς add. Δ (π) b); ἐκκειμένων ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη m. 2 V, del. ἀνίσων lin. 13. 17. ἔστωσαν F. σύμ-

ΓZ, *ΓZ* autem *BH* metiens se ipsa minorem relinquat *AH*, et hoc semper fiat, donec relinquatur magnitudo minor magnitudine *E*. fiat et relinquatur $AH < E$. iam quoniam *E* magnitudinem *AB* metitur et *AB* magnitudinem *ΔZ*, etiam *E* magnitudinem *ZΔ* metitur. uerum etiam totam *ΓΔ* metitur. itaque etiam reliquam magnitudinem *ΓZ* metietur. sed *ΓZ* magnitudinem *BH* metitur. quare etiam *E* magnitudinem *BH* metitur. uerum etiam totam *AB* metitur. quare etiam reliquam *AH* metietur, maior minorem; quod fieri non potest. itaque magnitudines *AB*, *ΓΔ* nulla magnitudo metietur. ergo magnitudines *AB*, *ΓΔ* incommensurabiles erunt [def. 1].

Ergo si ex duabus magnitudinibus inaequalibus, et quae sequuntur.

III.

Datis duabus magnitudinibus commensurabilibus maximam earum mensuram communem inuenire.

Sint duae magnitudines datae commensurabiles *AB*, *ΓΔ*, quarum minor sit *AB*. oportet igitur magnitudinum *AB*, *ΓΔ* maximam mensuram communem inuenire.

Nam magnitudo *AB* magnitudinem *ΓΔ* aut metitur aut non metitur. iam si metitur, et se ipsam quoque

---

μετρα μεγέθη V. 18. *ἔλαττον* F. 20. *μέγεθος*] om. Theon (BFVb). *ἤτοι*] m. rec. P. 21. Post *οὖν* add. *τὸ AB τὸ ΓΔ* V. *μετρεῖ*] (prius) supra m. 1 B. *αὐτό* B, corr. m. 2. *τῶν AB, ΓΔ*] om. V.

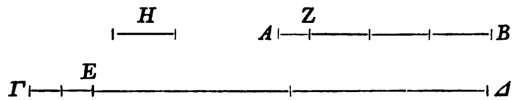
ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν· καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον. μεῖζον γὰρ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΒ οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ. καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΕΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρείτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ, καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ ΑΒ, ΓΔ. ἔστω τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ, καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ, καὶ λοιπὸν τὸ ΑΖ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ

---

1. *ἐστίν*] comp. F, *ἐστί* Bb, *ἐστὶ τῶν ΑΒ, ΓΔ* V. *καί*] (alt.) *μέτρον ἐστί* V. 4. *καί*] om. BFVb. *ἀνθυφαιρομένου* V, sed corr. m. 2; *ἀνθυφαιρόμενον* F. 5. *ἀεί*] *ἄρα ἀεί* Vb, *ἄρα* F, om. B (*ἄρα ἀεί* m. 2). 8. *τὸ ΕΓ* — 9. *ἔλασσον*] m. 2 B. 10. *δὲ ΑΖ*] *ΑΖ δέ* P. 13. *μετρήσει* — 14. *ΑΒ*] mg. m. 1 P. 14. Post *ΑΖ* ras. 1 litt. V. 16. *μετρεῖ*] *μετρησει* F. Deinde add. Theon: *τὸ ΑΖ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ* (BFVb); idem m. rec. P. *ἄρα*] om. φ. *ἐστί* BV, comp. Fb. 18. *τά*] *τό* B, corr. m. 2. Post *ΓΔ* add. *μετρείτω καί* V, sed punctis del. 20.



metitur, AB magnitudinum AB, $\Gamma\Delta$ communis est mensura. et adparet, eandem maximam esse; nam magnitudo magnitudine AB maior AB non metietur.

itaque ne metiatur AB magnitudinem $\Gamma\Delta$. et minore semper uicissim a maiore subtracta reliquum aliquando magnitudinem praecedentem metietur, quia AB, $\Gamma\Delta$ incommensurabiles non sunt [cfr. prop. II]. et AB magnitudinem $E\Delta$ metiens se ipsa minorem relinquat $E\Gamma$, $E\Gamma$ autem ZB metiens se ipsa minorem relinquat AZ, et AZ magnitudinem ΓE metiatur. iam quoniam AZ magnitudinem ΓE metitur, ΓE autem ZB, etiam AZ magnitudinem ZB metietur. uerum etiam se ipsam metitur. quare etiam totam AB metietur AZ. sed AB magnitudinem ΔE metitur. itaque etiam AZ magnitudinem $E\Delta$ metietur. uerum etiam ΓE metitur. quare etiam totam $\Gamma\Delta$ metitur. itaque AZ magnitudinum AB, $\Gamma\Delta$ communis est mensura. iam dico, eandem maximam esse. nam si minus, magnitudo erit maior magnitudine AZ, quae AB, $\Gamma\Delta$ metiatur. sit H. iam quoniam H magnitudinem AB metitur, et AB magnitudinem $E\Delta$ metitur, etiam H magnitudinem $E\Delta$ metietur. uerum etiam totam $\Gamma\Delta$ metitur. quare etiam reliquam ΓE metitur H. sed ΓE magnitudinem ZB metitur. itaque etiam H magnitudinem ZB metitur. uerum etiam totam AB metitur et reliquam AZ me-

---

$E\Delta$] (prius) ΔE P. 21. καί] (alt.) om. V. 23. τό] (alt.) τόν P. 24. λοιπὸν ἄρα F.

ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων το μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, Γ· δεῖ δὴ τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α, Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὔ [μετρεῖ]. μετρείτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α, Β, τὸ Δ ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α, Β οὐ μετρεῖ.

---

1. *ἐστίν*] om. F. *μεῖζον*] supra scr. m. 1 P. *τι μεῖζον* F, sed corr. 2. *μεγέθη μετρήσει* Theon (BFVb). *τό*] (alt.) m. 2 F. 3. *ἐστί* BVb, comp. F. 5. *μέτρο* P, sed corr. *εὕρηται* P. Deinde add. *τὸ ΑΖ* V, sed punctis notat. 6. *δεῖξαι*] *ποιῆσαι* B et b (mg. *γρ. δεῖξαι*), *δεῖ δεῖξαι* F (mg. m. 2: *γρ. ποιῆσαι*). 9. *μετρῇ*] *-ῃ* in ras. P. 15. Ante *δεῖ* ras. 1 litt. P. 16. *δύο*] om. V. 17. *δή*] m. rec. P. 18. *μετρεῖ*] om. P. 19. *μετρεῖ δέ* — 20. *μετρεῖ*] mg. m. 1 P. 20. *Δ ἄρα*] *δὲ Δ* P. *τῶν*] *-ν* postea add. F. *ἐστί* BV, comp. Fb. 21. *καί*] (alt.) om. BVb. 22. *μέγεθος* Fb. Post *B* ras. 1 litt. V. Post *μετρεῖ* add. *εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω τὰ Α, Β, Γ μεῖζον τοῦ Δ* (*μεγέθους* add. V) *τὸ Ε· καὶ ἐπεὶ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ,*

tietur, maior minorem; quod fieri non potest. itaque magnitudo maior magnitudine *AZ* magnitudines *AB*, *ΓΔ* non metietur. ergo *AZ* magnitudinum *AB*, *ΓΔ* maxima mensura communis est.

Ergo datis duabus magnitudinibus commensurabilibus *AB*, *ΓΔ* maxima mensura communis inuenta est; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

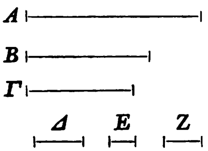
Hinc manifestum est, si magnitudo duas magnitudines metiatur, eandem maximam earum mensuram communem metiri.

IV.

Datis tribus magnitudinibus commensurabilibus maximam earum mensuram communem inuenire.

Sint datae tres magnitudines commensurabiles *A*, *B*, *Γ*. oportet igitur magnitudinum *A*, *B*, *Γ* maximam mensuram communem inuenire.

Sumatur enim duarum magnitudinum *A*, *B* maxima mensura communis [prop. III] et sit *Δ*. *Δ* igitur magnitudinem *Γ* aut metitur aut non metitur. prius metiatur. iam quoniam *Δ* magnitudinem *Γ* metitur, et etiam *A*, *B* metitur, *Δ* magnitudines *A*, *B*, *Γ* metitur. *Δ* igitur magnitudinum *A*, *B*, *Γ* communis est mensura. et adparet, eandem maximam esse; nam magnitudo maior magnitudine *Δ* non metitur *A*, *B*.



καὶ τὰ *A*, *B* μετρήσει καὶ τὸ τῶν *A*, *B* μέγιστον κοινὸν (κοινὸν μέγιστον V) μέτρον τὸ *Δ* μετρήσει (μετρήσει τὸ *Δ* V) τὸ μεῖζον τὸ ἔλαττον (ἔλασσον V). ὅπερ ἄτοπόν ἐστιν (ἀδύνατον V) V et mg. m. 2 B.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. λέγω πρῶτον, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ, Δ. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α, Β μετρήσει· ὥστε καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ, Δ. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α, Β μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ το Γ. τὸ Ε ἄρα τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ κοινόν ἐστι μέτρον. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α, Β, Γ. καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α, Β ἄρα μετρήσει καὶ τὸ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Α, Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. ἔστι δὲ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τοῦ Ε μεγέθους [μέγεθος] τὰ Α, Β, Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α, Β, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἐὰν μὴ μετρῇ τὸ Δ τὸ Γ, ἐὰν δὲ μετρῇ, αὐτὸ το Δ.

---

1. *ὅτι πρῶτον* F. 2. *ἐστι*] (alt.) *ἐστιν* P. 4. *μετρεῖ* V. 5. *μετρήσει τὸ Δ* F. Post *ὥστε* ras. 2 litt. V. 6. *μετρεῖ* V. 7. *ἐστί*] *εἰσίν* P. *οὖν*] om. BFVb. *τό*] m. rec. P. 8. *καί*] om. F. *ἔστω τὸ Ε*] mg. m. 2 F. 9. *μετρεῖ — Α, Β*] om. F. *μετρήσει*] *μετρεῖ* V. 10. *τὸ Ε — 11. μετρεῖ*] om. Theon (BFVb). 11. *μέτρον ἐστί* V. *ἐστιν* P. 14. *μετρεῖ*] supra scr. F. *ἄρα*] om. BFVb. 15. *Β*] *Β ἄρα* BFb. 16. *μέγιστον*] m. rec P. 17. *μετρεῖ*] (prius) corr. ex *μετρήσει* m. rec. P. 18. *τά*] *τό* b. 19. *τὸ Ζ. ἔστι δὲ τὸ Ε*] mg. m. 2 F; *τὸ Ζ· τὸ δὲ τῶν Γ, Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε* V. 20. *μετρεῖ* V.

iam ne metiatur *Δ* magnitudinem *Γ*. prius dico, *Γ*, *Δ* commensurabiles esse. nam quoniam *A*, *B*, *Γ* commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur, quae nimirum etiam *A*, *B* metietur. quare etiam maximam earum mensuram communem *Δ* metietur [prop. III coroll.]. uerum etiam *Γ* metitur. quare magnitudo illa *Γ*, *Δ* metietur. itaque *Γ*, *Δ* commensurabiles sunt. sumatur igitur maxima earum mensura communis [prop. III] et sit *E*. iam quoniam *E* magnitudinem *Δ* metitur, et *Δ* magnitudines *A*, *B* metitur, etiam *E* magnitudines *A*, *B* metietur. uerum etiam *Γ* metitur. *E* igitur *A*, *B*, *Γ* metitur. *E* igitur magnitudinum *A*, *B*, *Γ* communis est mensura. iam dico, eandem maximam esse. nam si fieri potest, magnitudo magnitudine *E* maior sit *Z* et metiatur *A*, *B*, *Γ*. et quoniam *Z* magnitudines *A*, *B*, *Γ* metitur, etiam *A*, *B* metietur et maximam earum mensuram communem [prop. III coroll.]. maxima autem magnitudinum *A*, *B* mensura communis est *Δ*. *Z* igitur *Δ* metitur. uerum etiam *Γ* metitur. *Z* igitur *Γ*, *Δ* metitur. quare etiam maximam earum mensuram communem metietur [id.]. ea autem est *E*. *Z* igitur *E* metietur, maior minorem; quod fieri non potest. itaque magnitudo magnitudine *E* maior *A*, *B*, *Γ* non metitur. *E* igitur magnitudinum *A*, *B*, *Γ* maxima est mensura communis, si *Δ* magnitudinem *Γ* non metitur, sin metitur, ipsa *Δ*.

---

21. τὰ *A*, *B*, *Γ* μετρεῖ μέγεθος F. μέγεθος] m. rec. P. τά] τό B, sed corr. *Γ*] *Γ*, *Δ* (eras.) μεγέθη V. 22. τό] (alt.) m. 2 F. 23. ἐάν] ἄν P.

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων το μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε'.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γαρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. καὶ ὁσάκις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ ἀριθμὸν καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ προς τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας,

2. εὕρηται P. ποιῆσαι B et F (supra scr. δεῖξαι). 4. μεγέθηι F. 5. μέτρον] supra scr. F. 7. δέ BVb. 8. λειφθήσεται F. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Theon (BFVb). 15. ἐστιν P. Β μεγέθη F. 20. τόν] τό Bb. 21. μετρήσει b. ἀριθμόν] om. V. 22. καί] κατά F. 23. τόν] τό B. 25. τῷ Ε] corr. ex αὐτῷ m. rec. b.

Ergo datis tribus magnitudinibus commensurabilibus maxima mensura communis inuenta est.

Corollarium.

Hinc manifestum est, si magnitudo tres magnitudines metitur, eandem maximam earum mensuram communem metiri.

Iam similiter etiam in pluribus maxima mensura communis sumetur, et corollarium quoque progredietur. — quod erat demonstrandum.

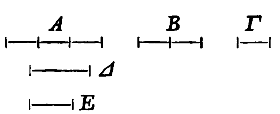
V.

Magnitudines commensurabiles inter se rationem habent, quam numerus ad numerum.

Sint magnitudines commensurabiles A, B. dico, A ad B rationem habere, quam habeat numerus ad numerum.

Nam quoniam A, B commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit Γ. et quoties Γ magnitudinem A metitur, totidem unitates sint in Δ, quoties autem Γ magnitudinem B metitur, totidem unitates sint in E.

iam quoniam Γ magnitudinem A secundum unitates numeri Δ metitur, sed etiam unitas numerum Δ secundum unitates eius metitur, unitas numerum Δ et Γ magnitudinem A aequaliter metitur. itaque $\Gamma : A = 1 : \Delta$ [VII def. 20]. e contrario igitur [V, 7 coroll.] $A : \Gamma = \Delta : 1$. rursus quoniam Γ magnitudinem B secundum uni-



V. Alexander Aphrod. in Anal. pr. fol. 87.

μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι᾽ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς΄.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δέ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ [ἀριθμόν], ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς

---

3. τό] (pr.) τόν P. 4. οὕτως ὁ V. 7. πρὸς ἄλληλα] mg. m. 1 P. 11. ἔχει b. 14. δύο γὰρ μεγέθη] mg. m. 1 P.

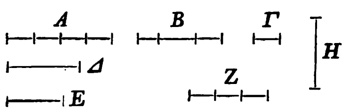
tates numeri *E* metitur, sed etiam unitas numerum *E* secundum unitates eius metitur, unitas numerum *E* et *Γ* magnitudinem *B* aequaliter metitur. itaque [VII def. 20] $\Gamma : B = 1 : E$. demonstrauimus autem, esse etiam $A : \Gamma = \Delta : 1$. itaque ex aequo [V, 22] $A : B = \Delta : E$.

Ergo magnitudines commensurabiles *A*, *B* inter se rationem habent, quam numerus *Δ* ad numerum *E*; quod erat demonstrandum.

VI.

Si duae magnitudines inter se rationem habent, quam numerus ad numerum, commensurabiles sunt.

Duae enim magnitudines *A*, *B* inter se rationem habeant, quam numerus *Δ* ad numerum *E*. dico, *A*, *B* magnitudines commensurabiles esse.



nam quot sunt in *Δ* unitates, in totidem partes aequales diuidatur *A*, et uni earum aequalis sit *Γ*. quot autem sunt in *E* unitates, ex totidem magnitudinibus magnitudini *Γ* aequalibus componatur *Z*.

quoniam igitur, quot sunt in *Δ* unitates, totidem etiam in *A* magnitudines sunt magnitudini *Γ* aequales, quae pars est unitas numeri *Δ*, eadem pars est etiam *Γ* magnitudinis *A*. itaque $\Gamma : A = 1 : \Delta$ [VII def. 20]. uerum unitas numerum *Δ* metitur. quare etiam *Γ*

προς ἄλληλα τὰ *A*, *B* V. 15. τόν] τ̀ (τόν) F, τό φ. 21. τοσαῦται V, ι eras. 22. εἰσι] ἐστιν P. ἴσαι V, ι eras. 23. *Δ* ἀριθμοῦ F. τό] (alt.) ὁ P, in ras. V. τοῦ] e corr. V. 25. *Δ* ἀριθμόν F. Post μονάς ras. 4 litt. V. 26. καὶ ἐπεὶ καί V. τό] ὁ P. 27. ἀριθμόν] om. P, corr. ex ἀριθμός F.

τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεί, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ ἴσα τῷ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε [ἀριθμόν]. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ἐστὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως καὶ πρὸς τὸ Ζ. τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τῷ Ζ. μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α, Β μετρεῖ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοί, ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ Α, δύνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν, οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ, ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμος πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν, οὕτως τὸ ἀπὸ

---

1. εἰσίν] εἰσὶ καί V. 2. τοσαῦται P, et FV, sed corr. εἰσιν P. Z μεγέθη F. ἴσαι V, sed corr. 3. ἀριθμόν] om. P. 4. τό] (alt.) τόν b. 5. τό] ὁ B. τό] τόν Bb. 6. ἀλλ'] καί V. ὁ] postea ins. m. 1 F. 7. ἐστί] om. V. 8. καί] τὸ Α F. 9. λόνγον P, sed corr. 11. μήν] μετρεῖ P. τὸ Γ]

magnitudinem A metitur. et quoniam est $\Gamma : A = 1 : \Delta$, e contrario [V, 7 coroll.] erit $A : \Gamma = \Delta : 1$. rursus quoniam, quot sunt in E unitates, totidem etiam in Z magnitudines magnitudini Γ aequales sunt, erit $\Gamma : Z = 1 : E$ [VII def. 20]. demonstrauimus autem, esse etiam $A : \Gamma = \Delta : 1$. itaque ex aequo [V, 22] est $A : Z = \Delta : E$. uerum $\Delta : E = A : B$. quare etiam $A : B = A : Z$. A igitur ad utrumque B, Z eandem rationem habet. ergo $B = Z$ [V, 9]. Γ autem Z metitur; quare etiam B metitur. uerum etiam A metitur. Γ igitur A, B metitur. itaque A et B commensurabiles sunt.

Ergo si duae magnitudines inter se, et quae sequuntur.

Corollarium.

Hinc iam manifestum est, si duo numeri sint Δ, E et recta A, fieri posse, ut faciamus, ut $\Delta : E$, ita rectam ad aliam rectam. sin rectarum A, Z media proportionalis sumitur B, erit $A : Z = A^2 : B^2$, h. e. ut prima ad tertiam, ita figura in prima descripta ad figuram in secunda similem et similiter descriptam [VI, 20 coroll. 2, cfr. V def. 9]. sed $A : Z = \Delta : E$.

καὶ τὸ Γ V. 12. *ἐστίν* P. *B*] e corr. V. 13. *καὶ τὰ ἑξῆς*] *λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι* V. 16. *ὡς*] m. 2 F. *εὐθεῖαι* F. *ἡ A*] e corr. V. 17. *ὁ*] *τόν* V, supra scr. m. 2 F. *Δ*] om. BFb. *ἀριθμόν* FV. *E*] om. BFb; *ὡς τὸν Δ ἀριθμὸν πρὸς τὸν E ἀριθμόν* m. 2 B. *τήν*] om. V, *ἡ* P; del. m. rec. B. 18. *εὐθεῖαν*] *-αν* eras. V, *εὐθεῖα* P. *εὐθεῖαν*] *τὴν εὐθεῖαν* V et m. rec. B. 19. Z] *B* B, sed corr. 21. *ὡς*] *ὃς ετερ?* V. *πρώτη*] supra add. $\bar{\alpha}$ F, $\hat{\alpha}$ PBVb. *τρίτην*] ξ V, $\hat{\gamma}$ Pb et corr. ex *γ* B m. 2 (ζ m. rec.); supra add. $\bar{\gamma}$ F. *πρώτης*] $\bar{\alpha}$ P. 24. *ἀριθμόν*] corr. ex *ἀριθμός* F. *γέγονεν ἄρα*] supra scr. m. rec. F.

τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β· λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, καὶ τὰ ἑξῆς.

η'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἕξει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἑξῆς.

---

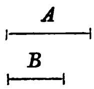
1. *Α εὐθείας*] in ras. m. 1 b. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. Theon (BFVb). Seq. demonstr. alt.; u. app. 5. Post *ἀριθμόν* ras. 3 litt. V. 7. *τό*] ins. m. 1 F. 9. Ante *ἔσται* ras. 1 litt. F. *ἔστιν* BF. 10. *γρ. τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει* mg. m. 1 b. 12. *σύμμετρα* b. *λόγον οὐκ ἔχει πρὸς ἄλληλα* BFb. 13. *καὶ τὰ ἑξῆς*] om. F (in mg. quaedam erasa), *ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν* BVb. 20. *ἐστιν* P, *ἔσται* V. 21. *γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β* Theon (BFVb). 22. *ἔχει* b. *ὅνπερ* V.

itaque inuenimus $\Delta : E = A^2 : B^2$. — quod erat demonstrandum.

VII.

Magnitudines incommensurabiles inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum.

Sint magnitudines incommensurabiles A, B. dico, A ad B rationem non habere, quam habeat numerus ad numerum.

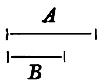


Nam si A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum, A et B commensurabiles erunt [prop. VI]. uerum non sunt. itaque A ad B rationem non habet, quam numerus ad numerum.

Ergo magnitudines incommensurabiles inter se rationem non habent, et quae sequuntur.

VIII.

Si duae magnitudines inter se rationem non habent, quam numerus ad numerum, magnitudines incommensurabiles erunt.



Duae enim magnitudines A, B inter se rationem ne habeant, quam numerus ad numerum. dico, magnitudines A, B incommensurabiles esse.

Nam si commensurabiles sunt, A ad B rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V]. uerum non habet. itaque magnitudines A, B incommensurabiles sunt.

Ergo si duae magnitudines inter se, et quae sequuntur.

ἀριθμόν] corr. ex *ἀριθμός* m. 1 P. 23. *ἐστίν* P. 24. *ἐάν — μεγέθη*] om. F. *πρὸς ἄλληλα*] bis b. *καὶ τὰ ἑξῆς*] *λόγον μὴ ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν ἀσύμμετρα ἔσται* V.

θ'.

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Ἔστωσαν γὰρ αἱ Α, Β μήκει σύμμετροι· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει, ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν

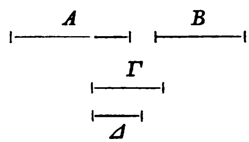
---

3. πρὸς ἄλληλα] supra scr. F. ἔχῃ V, corr. m. 1. 4. ἀριθμός] supra scr. m. 2 B. 5. τετράγωνα τά] supra scr. m.

IX.

Quadrata rectarum longitudine commensurabilium inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; et quadrata, quae inter se rationem habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, etiam latera longitudine commensurabilia habebunt. quadrata autem rectarum longitudine incommensurabilium inter se rationem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; et quadrata, quae inter se rationem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne latera quidem longitudine commensurabilia habebunt.

Nam A, B longitudine commensurabiles sint. dico, $A^2 : B^2$ rationem habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum.



Quoniam enim A et B longitudine commensurabiles sunt, $A : B$ rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V]. sit $A : B = \Gamma : \Delta$. iam quoniam $A : B = \Gamma : \Delta$, et $A^2 : B^2$ duplex est quam ratio $A : B$ (nam figurae similes inter se duplicatam rationem habent

2 B. 8. *συμμέτρων* b (corr. m. rec.), φ; *αἱ* seq. ras. F. 9. *ὃν* BFb. 10. *ἀριθμόν*] om. V. 11. *μὴ ἔχοντα λόγον* V. 12. *ὅνπερ* V. 15. *γάρ*] om. V. 16. *τό*] (prius) supra scr. m. 1 P. *τετράγωνον*] (alt.) m. 2 comp. F. 17. *ὅνπερ* V. 21. *ὃν*] *οὖν ὃν* Bb, *οὖν* corr. in *οὖν ὃν* FV. 22. *Γ ἀριθμός* BVb et e corr. F. *Δ ἀριθμόν* BFVb. 23. *τῆς*] e corr. V. *διπλάσιον* V, corr. m. 2. 24. *τό*] corr. ex *τόν* V. 26. *τοῦ*] (alt.) om. P, supra scr. F. *ἀριθμοῖ*] om. P. 27. *ἀριθμόν*] om. P. *ὁ τοῦ*] *τό* F. 28. Post *Γ* del. *πρὸς τὸν Δ* P. *τετραγώνου*] *τετραγων̀* seq. ras. 1 litt. F. *τόν*] *τό* B. 29. *μέσον* B, corr. m. 2.

ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον [ἀριθμὸν] διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμόν].

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον]· λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον], οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον], ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] τετραγώνου [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμὸν] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμόν]. ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ Α τῇ Β μήκει· λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθ-

---

1. *ἀριθμόν*] om. BFVb. 5. *Γ*] in ras. F, *Γ ἀριθμοῦ* FVb. *ἀριθμός*] om. P. 6. *ἀριθμοῦ*] om. P. *ἀριθμόν*]

quam latera correspondentia [VI, 20 coroll.]), et $\Gamma^2 : \Delta^2$ duplex est quam ratio $\Gamma : \Delta$ (nam inter duos numeros quadratos unus medius est numerus, et numerus quadratus ad numerum quadratum duplicatam rationem habet quam latus ad latus [VIII, 11]), erit $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$.

Iam uero sit $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$. dico, A et B longitudine commensurabiles esse.

nam quoniam est $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$, et $A^2 : B^2$ duplex est quam ratio $A : B$, $\Gamma^2 : \Delta^2$ autem duplex quam $\Gamma : \Delta$, erit $A : B = \Gamma : \Delta$. itaque A ad B rationem habet, quam numerus Γ ad numerum Δ. ergo A et B longitudine commensurabiles sunt [prop. VI].

Iam uero A et B longitudine incommensurabiles sint. dico, $A^2 : B^2$ rationem non habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum.

si enim $A^2 : B^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, A et B commen-

om. P. 8. *Β τετράγωνον* BVb et e corr. F. *τοῦ*] corr. ex *τῆς* V. 9. *τετράγωνον*] om. P. 11. *Α*] in ras. b. 12. *τετράγωνον*] om. P. 13. *τόν*] *τό* b. *τετράγωνον*] om. P. 14. *τοῦ*] m. 2 F. *τό*] *τόν* B, *τὸν τοῦ* F. 15. *τετράγωνον*] om. P. 16. *ἀριθμοῦ*] om. P. *τετράγωνος* BV. 17. *ἀριθμοῦ*] om. P, *ἀριθμός* BV. *ἀριθμοῦ*] om. P. *τετραγώνου* P. 18. *ἀριθμόν*] om. P. *ἐστίν* P. *τοῦ*] om. V. 19. *ἀριθμοῦ*] om. P. *ἀριθμόν*] om. P. 20. *ἀριθμός*] om. P. 21. *ἀριθμόν*] om. P. 22. *τὸν Δ*] m. 2 B. 25. *Α*] corr. ex *Β* m. 1 V. *τετράγωνον*] (alt.) om. P. 29. *τετράγωνον*] om. P.

μὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, σύμμετρος ἔσται ἡ Α τῇ Β. οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β [τετράγωνον] λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρος ἡ Α τῇ Β, ἕξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει [εἴπερ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρά ἐστιν. ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

πάλιν ἐπεί, ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, μήκει ἐδείχθη σύμμετρα καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀλλὰ ἁπλῶς, ὃν

---

2. Post Β add. μήκει m. 2 V. 3. τετράγωνον] om P. 5. δή] om. b, δέ BFV. 6. τετράγωνον] om. P. 8. ἐστιν] e

surabiles erunt. at non sunt. ergo $A^2 : B^2$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.

iam rursus $A^2 : B^2$ rationem ne habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. dico, A et B longitudine incommensurabiles esse.

nam si A et B commensurabiles sunt, $A^2 : B^2$ rationem habebit, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. at non habet. ergo A et B longitudine commensurabiles non sunt.

Ergo quadrata rectarum longitudine commensurabilium, et quae sequuntur.

Corollarium.

Ex iis, quae demonstrauimus, manifestum est, rectas longitudine commensurabiles semper etiam potentia

---

corr. F. 9. *εἰ*] in ras. P. *ἔσται* P. 10. *Α τετράγωνον* BFb. *Β τετράγωνον* BFb. 12. Post *B* add. *ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β* FVb, B m. 2. 13. Post *συμμέτρων* add. *εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν* V. Post *ἑξῆς* add. Theon: *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* (BFVb). 15. *ἐκ*] *ἔστω ἐκ* BFV. *ἔσται*] om. b. 17. *οὐ*] in ras. F, *σύμμετροι οὐ* V. *εἴπερ*] corr. ex *ἤπερ* m. 2 V. *τά*] corr. ex *τοῖς* m. 1 F. 21. Post *μήκει* add. *ἀεί* m. 2 B. *εἰσί*] om. P. 23. *ὅσα*] *ὧν* P, corr. mg. m. 1. *τετράγωνα λόγον ἔχει πρὸς ἄλληλα* F. 26. *τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν* BFVb. Post *ἀριθμόν* add. *οἷον ὁ λ̄ καὶ ὁ ξ̄· ὁ γὰρ ξ̄ πρὸς τὸν λ̄ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, σύμμετροι δέ· αἱ δὲ εὐθεῖαι, ἀφ᾽ ὧν ἀνεγράφησαν, ἀσύμμετροί εἰσιν· τὰ γὰρ τετράγωνα ἄλογά εἰσιν· ὥστε οὖν αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει* b. 28. *ἀλλ᾽* BFV. *ἁπλῶς*] om. Fb, m. 2 B. *ὅν*] *ὃν ἕτερός τις* BFVb.

ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα πάντως καὶ δυνάμει, τὰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

λέγω δή, ὅτι [καὶ] αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ὥστε οὐχ αἱ τῷ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ δύνανται μήκει οὖσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ [εἰσι] μήκει σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι· ὅπερ ἄτοπον. αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει].

Λῆμμα.

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ὅτι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. εἰ γὰρ ἕξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

---

1. ἀριθμόν τινα V. μέν] om. V. ἔσται] εἰσιν BF, ἐστιν comp. b; ἐστι V, corr. in μέν m. 2. αὐτά] om. V;

commensurabiles esse, rectas autem potentia commensurabiles non semper etiam longitudine.[1])

Lemma.

In arithmeticis demonstratum est, similes numeros planos eam inter se rationem habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum [VIII, 26], et si duo numeri inter se rationem habeant, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum, similes numeros planos eos esse.[2]) unde adparet, numeros planos non similes (h. e. qui latera proportionalia non habent [cfr. VII def. 22]) inter se rationem non habere, quam habeat numerus quadratus ad numerum quadratum. nam si habebunt, similes erunt plani; quod contra hypothesim est. ergo numeri plani non

1) Quae sequitur p. 28, 17 — 30, 5 demonstratio corollarii et superflua est et a sermone Euclidis abhorret. praeterea offendit, quod plus demonstratur (*λέγω δή* lin. 6), quam propositum erat.

2) Hoc nusquam demonstratur; sed est VIII, 26 conuersa, qua etiam in IX, 10 p. 358, 19 utitur.

---

supra *τά* ras. est. 2. Ante *δυνάμει* add. *τουτέστιν αἱ εὐθεῖαι, ἀφ᾽ ὧν ἀνεγράφησαν* BFVb. *τά*] *αἱ* BFVb. 3. *σύμμετροι* BFVb. *τά*] *αἱ* BFVb. 4. Supra *ἔχοιεν* m. 2: *τὰ τετράγωνα* V. 6. *καί*] om. P. 7. Post *δυνάμει* add. *ἀσύμμετροι* V. *ἐπειδήπερ*] *ἐπειδὴ γάρ* P. 10. *τῷ*] om. FV. 11. *ἀλλὰ καί* V. 12. *σύμμετροι καὶ ἀσύμμετροι* P. 14. *μήκει*] -*η*- e corr. P. 15. *εἰσι*] om. P, *εἰσιν* B, comp. b. 16. *ὑπόκειται* b. Post *καί* del. *δυνάμει* F. 19. *λῆμμα*] om. P. 20. *δὴ ἐν* F. *ὅτι*] supra scr. m. 1 b. 21. *λόγον πρὸς ἀλλήλους ἔχουσιν* F. *ἔχουσι* P, corr. m. rec. 23. *δύο*] supra scr. m. 1 F. 25. Supra *ἐπίπεδοι* scr. *οἱ ἀριθμοί* m. 1 b. *μή*] supra scr. m. 1 V. 29. *ὑπόκεινται* P.

οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

ι΄.

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ *Α*· δεῖ δὴ τῇ *Α* προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ *Β*, *Γ* πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ *Β* πρὸς τὸν *Γ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ* τετράγωνον· ἐμάθομεν γάρ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τῷ ἀπὸ τῆς *Δ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *Β* πρὸς τὸν *Γ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *Α* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Δ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *Α* τῇ *Δ* μήκει. εἰλήφθω τῶν *Α*, *Δ* μέση ἀνάλογον ἡ *Ε*· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *Α* πρὸς τὴν *Δ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Ε*. ἀσύμμετρος δέ ἐστιν ἡ *Α* τῇ *Δ* μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον τῷ

1. ἄρα μή] in ras. m. 1 P. οὐκ] ins. m. 1 V. 3. Seq. demonstr. alt., u. app. 6. συμμέτρους B, corr. m. 2. 7. καί] ins. postea F. 8. δεῖ] δ- in ras. V. 10. τήν] τῆς P, corr. m. rec.; τῇ V, sed corr. 13. τουτέστιν P. Post ἐπίπεδοι add. ⦜ F, cui signo in mg. nihil resp.; in b seq. οἱ γὰρ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

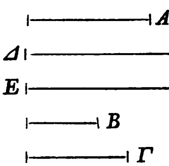
similes inter se rationem non habent, quam numerus quadratus ad numerum quadratum.

X.

Data recta duas alias inuenire ei incommensurabiles, alteram longitudine tantum, alteram etiam potentia.

Data recta sit A. oportet igitur duas alias rectas inuenire rectae A incommensurabiles, alteram longitudine tantum, alteram etiam potentia.

Sumantur enim duo numeri B, Γ, qui inter se rationem non habeant, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, h. e. plani non similes [u. lemma], et fiat $B:\Gamma = A^2:\Delta^2$ (hoc enim didicimus [prop. VI coroll.]). itaque A^2 et Δ^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et quoniam $B:\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne $A^2:\Delta^2$ quidem rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque A et Δ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. sumatur rectarum A, Δ media proportionalis E. itaque $A:\Delta = A^2:E^2$ [V def. 9]. sed A et Δ longitudine incommensurabiles



πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν; in V seq. διὰ τοῦτο, punctis del. m. 2. 16. τῆς] τοῦ P. τῆς] τοῦ P. Δ] corr. ex B m. 1 V, B b. 19. A] corr. ex Δ m. 1 F. πρός] supra m. 1 V. τό] corr. ex τῷ V. Δ] B b. 21. ἐστίν] postea ins. F. 24. E τετράγωνον V. 25. ἐστίν P.

ἀπὸ τῆς Ε τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει.

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσεύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, Ε, μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

ια'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῷ Β σύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἔσται.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. καί ἐστιν ὡς

---

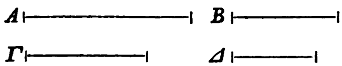
3. προστεθείσῃ Pb. προσηύρηνται BFb. 4. ἡ] corr. ex τῇ B. Post Δ add. καί B et F, sed del. 5. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. PBFb. Seq. scholium in PBFb, u. app. 6. ια'] corr. ex ι' m. rec. P, ex ιγ' V. 8. πρῶτον] $\bar{\alpha}$ P, et sic saepius. τό] ins. postea F. τρίτον] $\bar{\gamma}$ P et b (et sic saepius). 15. ἐστιν BVb. 16. ἐστιν P. τὸ Α] (alt.) postea ins. F. 17. Β] corr. ex Α m. 1 F. 18. τὸ Α] corr. ex ὁ Α V. 20. Γ] in ras. V. 21. ὅτι ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ Γ τῷ Δ V. 22.

sunt. itaque etiam A^2 et E^2 incommensurabilia sunt.[1]) quare A et E potentia incommensurabiles sunt.[2])

Ergo data recta A duae aliae inuentae sunt Δ, E ei incommensurabiles, Δ longitudine tantum, E autem potentia et longitudine; quod erat demonstrandum.

XI.

Si quattuor magnitudines proportionales sunt, et prima secundaque commensurabiles sunt, etiam tertia quartaque commensurabiles erunt. et si prima secundaque incommensurabiles sunt, etiam tertia quartaque incommensurabiles sunt.



Quattuor magnitudines proportionales sint A, B, Γ, Δ, ita ut sit $A : B = \Gamma : \Delta$, et A, B commensurabiles sint. dico, etiam Γ, Δ commensurabiles esse.

Nam quoniam A, B commensurabiles sunt, $A : B$ rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V]. et $A : B = \Gamma : \Delta$. quare etiam $\Gamma : \Delta$ rationem habet, quam numerus ad numerum. ergo Γ, Δ commensurabiles sunt [prop. VI].

Iam uero A et B incommensurabiles sint. dico, etiam Γ, Δ incommensurabiles fore. nam quoniam A, B incommensurabiles sunt, $A : B$ rationem non habet,

1) Hoc ex prop. XI concludendum erat (quare Gregorius propp. X et XI permutauit). omnino tota prop. X cum lemmate multis de causis suspecta est, et uix crediderim, eam a manu Euclidis profectam esse.

2) Quare etiam longitudine (prop. IX coroll.).

ἔσται] ἐστιν BFb. 23. A] (alt.) supra scr. m. 1 V. ἄρα] supra scr. m. 1 F. 24. οὐκ] m. rec. b.

τὸ *Α* πρὸς τὸ *Β*, οὕτως τὸ *Γ* πρὸς τὸ *Δ*· οὐδὲ τὸ *Γ* ἄρα πρὸς τὸ *Δ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *Γ* τῷ *Δ*.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιβ΄.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Ἑκάτερον γὰρ τῶν *Α*, *Β* τῷ *Γ* ἔστω σύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ *Α* τῷ *Β* ἐστι σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ *Α* τῷ *Γ*, τὸ *Α* ἄρα πρὸς τὸ *Γ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ *Δ* πρὸς τὸν *Ε*. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ *Γ* τῷ *Β*, τὸ *Γ* ἄρα πρὸς τὸ *Β* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ *Ζ* πρὸς τὸν *Η*. καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν τοῦ τε, ὃν ἔχει ὁ *Δ* πρὸς τὸν *Ε*, καὶ ὁ *Ζ* πρὸς τὸν *Η* εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις οἱ *Θ*, *Κ*, *Λ*· ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν *Δ* πρὸς τὸν *Ε*, οὕτως τὸν *Θ* πρὸς τὸν *Κ*, ὡς δὲ τὸν *Ζ* πρὸς τὸν *Η*, οὕτως τὸν *Κ* πρὸς τὸν *Λ*.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ *Α* πρὸς τὸ *Γ*, οὕτως ὁ *Δ* πρὸς τὸν *Ε*, ἀλλ' ὡς ὁ *Δ* πρὸς τὸν *Ε*, οὕτως ὁ *Θ* πρὸς τὸν *Κ*, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ *Α* πρὸς τὸ *Γ*, οὕτως ὁ *Θ* πρὸς τὸν *Κ*. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ *Γ* πρὸς τὸ *Β*, οὕτως ὁ *Ζ* πρὸς τὸν *Η*, ἀλλ' ὡς ὁ *Ζ* πρὸς τὸν *Η*, [οὕτως] ὁ *Κ* πρὸς τὸν *Λ*, καὶ ὡς ἄρα τὸ *Γ* πρὸς τὸ *Β*, οὕτως ὁ *Κ* πρὸς τὸν *Λ*. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ *Α* πρὸς

---

1. *οὐδέ*] om. V. 2. *ἄρα*] om. V. *λόγον*] *ἄρα λόγον οὐκ* V. 4. *τέσσαρα*] *τὰ* $\bar{\delta}$ F. Ante *καὶ* add. *ἀνάλογον ᾗ* BFb; *ἀνάλογον ᾗ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾗ* V. Post *ἑξῆς* add. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* V. 5. *ιβ΄*] corr. ex *ια΄* m. rec. P. 6. *μεγέθη* b. 15. *ὁπόσων?* V (comp.). 17. *ἑξῆς*]

quam numerus ad numerum [prop. VII]. et $A:B=\Gamma:\Delta$. quare ne $\Gamma:\Delta$ quidem rationem habet, quam numerus ad numerum. itaque Γ, Δ incommensurabiles sunt [prop. VIII].

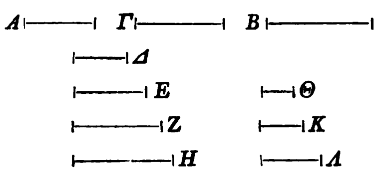
Ergo si quattuor magnitudines, et quae sequuntur.

XII.

Quae eidem magnitudini commensurabilia sunt, etiam inter se commensurabilia sunt.

Utraque enim A, B magnitudini Γ sit commensurabilis. dico, etiam A, B commensurabiles esse.

nam quoniam A, Γ commensurabiles sunt, $A:\Gamma$ rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V]. sit $A:\Gamma=\Delta:E$. rursus quoniam Γ, B commensurabiles sunt, $\Gamma:B$ rationem habet, quam numerus ad numerum [prop. V]. sit $\Gamma:B=Z:H$. et datis quotlibet rationibus, $\Delta:E$ et $Z:H$, numeri sumantur deinceps in rationibus datis, Θ, K, Λ [cfr. VIII, 4], ita ut sit $\Delta:E=\Theta:K$, $Z:H=K:\Lambda$.



iam quoniam est $A:\Gamma=\Delta:E$ et $\Delta:E=\Theta:K$, erit etiam $A:\Gamma=\Theta:K$ [V, 11]. rursus quoniam est $\Gamma:B=Z:H$ et $Z:H=K:\Lambda$, erit etiam $\Gamma:B=K:\Lambda$.

---

in ras. V; ἐλάχιστοι ἑξῆς F, sed corr. δοθεῖσιν P. 18. τὸν Δ] τόν postea ins. F, ὁ Δ P. 20. τό] (alt.) corr. ex τόν V. 22. ὁ Α P. τὸν Γ P. 23. ὁ Γ P. τό] τόν P. Β] corr. ex Γ m. 1 b. 25. οὕτως] om. P. καὶ ὡς — 26. Α] bis F, sed corr. 25. ὁ Γ P. 26. ἔστιν P. τό] ὁ F.

τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ. τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Λ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιγ'.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμερον ᾖ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α, Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἄλλῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν, καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, Γ,

---

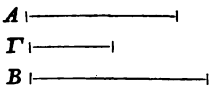
2. ὁ Α πρὸς τὸν Β b. 4. ἐστίν P. 6. σύμμετρα] συμ- supra scr. m. 1 P. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. Bb. Seq. lemma, u. app. 7. ιγ'] ιβ' corr. in ιγ' m. rec. P, γ in ras. F; ιδ', δ in ras. m. 1 B, ιγ' mg. 8. ᾖ] om. V. μεγέθη] -γέ- supra m. 1 P. ἀσύμμετρα F, sed corr.; σύμμετρα ᾖ V. δ' F. 11. δύο] mg. γρ. αὐτῷ m. 1. b. 12. ἄλλῳ] ἑτέρῳ BFV. 13. τὸ Β] om. b. τῷ Γ] eras. b. ἐστι τὸ Β τῷ Γ b. 14. εἰ — Γ] supra scr. m. rec. b. Γ τῷ Β P. 15. ἐστι B, comp. Fb, om. V. καί — σύμμε-] supra scr. m. 1 F. -τρον — 16. καί] in ras. F. 16. ὅπερ ἐστίν F. 17. ἄρα] (alt.)

uerum etiam $\varDelta : \varGamma = \varTheta : K$. ex aequo igitur $\varDelta : B = \varTheta : \varLambda$ [V, 22]. itaque $\varDelta : B$ rationem habet, quam numerus $\varTheta$ ad numerum $\varLambda$. itaque $\varDelta$, B commensurabiles sunt [prop. VI].

Ergo quae eidem magnitudini commensurabilia sunt, etiam inter se commensurabilia sunt; quod erat demonstrandum.

XIII.

Si duae magnitudines commensurabiles sunt, et alterutra earum magnitudini alicui incommensurabilis est, etiam reliqua eidem incommensurabilis erit.



Sint duae magnitudines commensurabiles A, B, et A alii magnitudini $\varGamma$ incommensurabilis sit. dico, etiam B, $\varGamma$ incommensurabiles esse.

nam si B, $\varGamma$ commensurabiles sunt et etiam A, B commensurabiles, etiam A, $\varGamma$ commensurabiles erunt [prop. XII]. at eaedem incommensurabiles sunt; quod fieri non potest. itaque B, $\varGamma$ commensurabiles non sunt. incommensurabiles igitur.

Ergo si duae magnitudines commensurabiles sunt, et quae sequuntur.

Lemma.

Datis duabus rectis inaequalibus inuenire, quantum maior quadrata minorem excedat.

Sint datae duae rectae inaequales AB, $\varGamma$, quarum

---

postea ins. B. 18. ἢ] om. P. ἀσύμμετρα F, sed corr. καὶ τὰ ἑξῆς] τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ἤ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι V. 19. ιε′ B. 20. ἀνίσων εὐθειῶν F. 21. ἐλάττονος F.

ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ ΑΒ τῆς Γ.

Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. φανερὸν δή, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία, καὶ ὅτι ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ, τουτέστι τῆς Γ, μεῖζον δύναται τῇ ΔΒ.

Ὁμοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἡ δυναμένη αὐτὰς εὑρίσκεται οὕτως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ δέον ἔστω εὑρεῖν τὴν δυναμένην αὐτάς. κείσθωσαν γάρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ'.

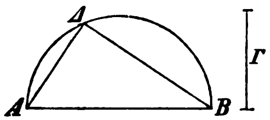
Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει].

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ

---

1. ἔστω] corr. ex ἐστιν m. 2 B. 3. ΑΒΔ P. 4. αὐτῷ e corr. F. ἡ ΑΔ ἴση F. 6. μεῖζον] corr. ex μείζων m. 1 F. 10. αἱ δοθεῖσαι] om. V. αἱ] αἱ δοθεῖσαι αἱ V. 11. τήν] ins. postea V. ἐκκείσθωσαν BFVb. 13. Ante πάλιν ins. ἐστι m. 1 F. ὅτι πάλιν b. ὅτι ἡ] ἡ in ras. F. 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. Theon (BFVb). 15. ιδ'] δ in ras. F, corr. ex

maior sit AB. oportet igitur inuenire, quantum AB^2 excedat Γ^2.



describatur in AB semicirculus $A\Delta B$, et in eum aptetur rectae Γ aequalis $A\Delta$ [IV, 1], et ducatur ΔB. manifestum igitur, $\angle A\Delta B$ rectum esse [III, 31], et $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 = \Gamma^2 + \Delta B^2$ [I, 47].

Similiter etiam datis duabus rectis recta quadrata iis aequalis hoc modo inuenitur.

sint datae duae rectae $A\Delta$, ΔB, et oporteat rectam quadratam iis aequalem inuenire. ponantur enim ita, ut angulum rectum comprehendant $A\Delta B$, et ducatur AB. rursus manifestum est, esse $AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2$ [I, 47]; quod erat demonstrandum.

XIV.

Si quattuor rectae proportionales sunt, et prima quadrata secundam excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam tertia quadrata quartam excedet quadrato rectae sibi commensurabilis. et si prima quadrata secundam excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam tertia quadrata quartam excedet quadrato rectae sibi incommensurabilis.

Sint quattuor rectae proportionales A, B, Γ, Δ, ita ut sit $A : B = \Gamma : \Delta$, et sit $A^2 = B^2 + E^2$, $\Gamma^2 = \Delta^2 + Z^2$

ιγ′ m. rec. P, ιϛ′ B (mg. ιδ′). 16. ὦσι Vb. 17. τῷ] e corr. V. 18. μήκει] om. P. 19. ἀπὸ τῆς b. 20. μήκει] om. P. 21. δυνήσηται FV, sed corr. συμμέτρου F, et B, corr. m. 2. ἑαυτῷ b. μήκει] om. P. 22. δυνήσηται F. 23. συμμέτρου PF, et B, corr. m. 2. ἑαυτῷ b. μήκει] om. P. 24. ἔστωσαν δή V. 25. A] e corr. V.

Α μὲν τῆς Β μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ε, ἡ δὲ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω, ὅτι, εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ὁ Γ τῇ Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπο τῆς Α ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Ε, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ. εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ, εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμερός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιε΄.

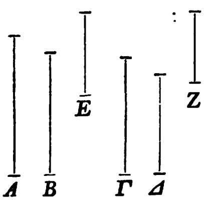
Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΒΓ·

1. *τῆς Β*] corr. ex *τῇ Β* m. 1 b. *Γ δέ* BFb. 3. *ἐστιν*] om. V. *τῇ*] corr. ex *τῆς* m. 1 P. *ἔστιν* B. 4. Ζ] e corr.

[u. lemma]. dico, siue A, E commensurabiles sint, etiam Γ, Z commensurabiles esse, siue A, E incommensurabiles sint, etiam Γ, Z incommensurabiles esse.

nam quoniam est $A : B = \Gamma : \Delta$, erit etiam $A^2 : B^2 = \Gamma^2 : \Delta^2$ [VI, 22]. uerum $A^2 = E^2 + B^2$, $\Gamma^2 = \Delta^2 + Z^2$.



itaque $E^2 + B^2 : B^2 = \Delta^2 + Z^2 : \Delta^2$. subtrahendo igitur [V, 17] $E^2 : B^2 = Z^2 : \Delta^2$. quare etiam [VI, 22] $E : B = Z : \Delta$. itaque e contrario [V, 7 coroll.] $B : E = \Delta : Z$. uerum etiam $A : B = \Gamma : \Delta$. ex aequo igitur [V, 22] $A : E = \Gamma : Z$. itaque siue A, E commensurabiles sunt, etiam Γ, Z commensurabiles sunt, siue A, E incommensurabiles sunt, etiam Γ, Z incommensurabiles sunt [prop. XI].

Ergo si, et quae sequuntur.

XV.

Si duae magnitudines commensurabiles componuntur, etiam totum utrique earum commensurabile erit; et si totum alterutri earum commensurabile est, etiam magnitudines ab initio positae commensurabiles erunt.

Componantur enim duae magnitudines commensura-

---

m. 1 b. 5. ἐστιν PB. 7. καί] om. V. 9. τῷ] corr. ex τό m. rec. P. Δ] in ras. m. 1 P. ἐστίν P. 10. ἐστίν P. Z, Δ P. 11. E, B] Δ, Z B. τά F. B] Δ B. 12. Δ, Z] $E\,B$ B. τά F. Δ] B in ras. m. 2 B. 13. ἀπό] (alt.) ins. m. 2 F. 14. ἔστιν — 15. Δ] mg. m. 1 P. 14. ἡ] supra scr. m. 2 F. 17. ἔστιν P. 19. εἴτ' P. 20. ἐστι] ἐστιν P. Post εἴτε del. οὖν b. ἐστιν] om. V. 21. σύμμετρος b. ἐστιν B. 22. ἄρα] om. V. Ante καί add. τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν (ὦσι V) FV. 23. ιε'] e corr. PF; ιζ' B, mg. ιε'. 28. συγκείσθωσαν BFb. $B\Gamma$] e corr. F.

λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐστι σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ. τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἔστω σύμμετρον τῷ ΑΒ· λέγω δή, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ, ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

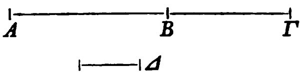
Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

---

1. *καί*] *καὶ τό* V. *τῶν*] *τῶι* P. *ἔσται* b. *σύμμετρόν ἐστι* V. 3. *ἐστιν* P. 6. *τά*] (prius) corr. ex *τῶν* F. 7. *ἐστίν* P. 8. *ΑΓ*] *ΑΒ, ΒΓ* P; *ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ* Theon (BFVb). *τῷ*] *τῇ* P, *ἔστω δὴ τῷ* (corr. ex *τό* V) Theon (BFVb). 9. *δή*] supra scr. F. 10. *ἐστιν* P. *ΑΓ*] *ΓΑ* P, *Γ* e corr. b; mg. *γρ. ΑΒ ΒΓ* m. 1 b. 12. *ΑΓ* FV. 13. *τά*] *τό*? V. 14. *ἐστίν* LPB. 15. Post *μεγέθη* add. *σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται* V. Post *ἑξῆς* add. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* V. 16. *ιϛ'*] corr. ex *ιδ'* m. rec. P, mut. in *ιζ'* m.

biles *AB*, *BΓ*. dico, etiam totum *AΓ* utrique *AB*, *BΓ* commensurabile esse.

nam quoniam *AB*, *BΓ* commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit *Δ*. iam



quoniam *Δ* magnitudines *AB*, *BΓ* metitur, etiam totum *AΓ* metietur. uerum etiam *AB*, *BΓ* metitur. *Δ* igitur *AB*, *BΓ*, *AΓ* metitur. ergo *AΓ* utrique *AB*, *BΓ* commensurabilis est [def. 1].

Iam uero *AΓ*, *AB* commensurabiles sint. dico, etiam *AB*, *BΓ* commensurabiles esse.

nam quoniam *AΓ*, *AB* commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit *Δ*. iam quoniam *Δ* magnitudines *ΓA*, *AB* metitur, etiam reliquam *BΓ* metietur. uerum etiam *AB* metitur. *Δ* igitur *AB*, *BΓ* metietur. itaque *AB*, *BΓ* commensurabiles erunt.

Ergo si duae magnitudines, et quae sequuntur.

XVI.

Si duae magnitudines incommensurabiles componuntur, etiam totum utrique earum incommensurabile est; et si totum alterutri earum incommensurabile est, etiam magnitudines ab initio positae incommensurabiles erunt.

Componantur enim duae magnitudines incommensurabiles *AB*, *BΓ*. dico, etiam totum *AΓ* utrique *AB*, *BΓ* incommensurabile esse.

---

2 F; ιη' B, mg. ις'. 19. σύμμετρον B, corr. m. 2; item lin. 20. 21. συγκείσθωσαν V. *BΓ*] corr. ex *ΓB* F.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ, ΑΒ, μετρήσει τι [αὐτὰ] μέγεθος. μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ· ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τα ΓΑ, ΑΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τὰ ΑΓ, ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστιν. τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω. ἔστω δὴ πρότερον τῷ ΑΒ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ· ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

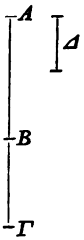
Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα.

Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ παραβληθὲν

---

1. *τά*] *τό* P. 2. *αὐτά*] om. P. 4. *ΑΒ*] *ΒΑ* V. 5. *ἐστίν* LP. 6. *ὑπόκεινται* LBb. *ἀδύνατόν ἐστιν* V. 8. *ἐστίν* LP. 9. Ante *ΑΓ* del. *Γ* m. 1 P. *σύμμετρα* B, corr. m. 2. *ἐστι* V, comp. Fb. *ΓΑ* F. 10. *ἐστιν*] om. B. 11. *ἔστω*] om. P. 12. *ἔστω δὴ πρότερον*] *καὶ πρῶτον* Theon (BFVb). *τῷ*] e corr. V. 13. *ἔσται*] *ἐστι* V. *σύμμετρα*] supra scr. *ἀ-* m. 1 F. 17. *ἐστί*] *ἐστίν* P, comp. F, *ἔσται* LBVb. *ὑπέκειντο* F. 19. *ἐστίν* LP. Post *ΒΓ* add. *ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι τὸ ΑΓ καὶ λοιπῷ τῷ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν* FVb.



nam si *ΓA*, *AB* incommensurabiles non sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur, si fieri potest, et sit *Δ*. iam quoniam *Δ* magnitudines *ΓA*, *AB* metitur, etiam reliquam *BΓ* metietur. uerum etiam *AB* metitur. *Δ* igitur *AB*, *BΓ* metitur. itaque *AB*, *BΓ* commensurabiles sunt. supposuimus autem, easdem incommensurabiles esse; quod fieri non potest. itaque nulla magnitudo *ΓA*, *AB* metietur. ergo *ΓA*, *AB* incommensurabiles erunt. similiter demonstrabimus, etiam *AΓ*, *ΓB* incommensurabiles esse. ergo *AΓ* utrique *AB*, *BΓ* incommensurabilis est.

Iam uero *AΓ* alterutri *AB*, *BΓ* incommensurabilis sit. sit prius magnitudini *AB* incommensurabilis. dico, etiam *AB*, *BΓ* incommensurabiles esse. nam si commensurabiles sunt, magnitudo aliqua eas metietur. metiatur et sit *Δ*. iam quoniam *Δ* magnitudines *AB*, *BΓ* metitur, etiam totum *AΓ* metietur. uerum etiam *AB* metitur. *Δ* igitur *ΓA*, *AB* metitur. itaque *ΓA*, *AB* commensurabiles sunt. supposuimus autem, easdem incommensurabiles esse; quod fieri non potest. itaque nulla magnitudo *AB*, *BΓ* metietur. itaque *AB*, *BΓ* incommensurabiles sunt.

Ergo si duae magnitudines, et quae sequuntur.

Lemma.

Si rectae alicui parallelogrammum adplicatur figura quadrata deficiens, adplicatum spatium rectangulo partium rectae adplicatione ortarum aequale est.

---

23. τετραγώνῳ] corr. ex παραλληλογράμμῳ m. rec. b. τό] τῷ F. τὸ παραβληθέν] om. b.

ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Παρὰ γὰρ εὐθεῖαν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ΔΒ· λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Καί ἐστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ, καί ἐστι τὸ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

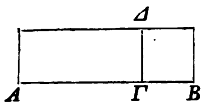
Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιζ'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει.]. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ,

3. τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον Theon (BFVb, ante ΑΔ eras. ΓΔ F). 4. τετραγώνῳ] corr. ex παραλληλογράμμῳ m. rec. b. ΔΒ] ΒΔ Fb. 5. ἐστίν LB. τῷ] τό F. ΑΓ] corr. ex ΓΑ m. 1 b. ΓΒ] Γ e corr. V. 7. ἐστιν LB. ΓΒ] ΒΓ BV. ἐστιν LPB. 8. ΓΔ] Δ P, Δ e corr. V. τουτέστι — ΓΒ] m. 2 V. τουτέστιν LPBV. 9. Post εὐθεῖαν add. παρα-



Rectae enim AB parallelogrammum adplicetur $A\Delta$ figura quadrata ΔB deficiens. dico, esse

$$A\Delta = A\Gamma \times \Gamma B.$$

et per se patet; nam quoniam ΔB quadratum est, erit $\Delta\Gamma = \Gamma B$. et $A\Delta = A\Gamma \times \Gamma\Delta = A\Gamma \times \Gamma B$.

Ergo si rectae alicui, et quae sequuntur.

XVII.

Si duae rectae inaequales datae sunt, et quartae parti quadrati minoris aequale spatium maiori adplicatur figura quadrata deficiens, quod eam in partes longitudine commensurabiles diuidat, maior quadrata minorem excedet quadrato rectae sibi commensurabilis. et si maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, et spatium quartae parti quadrati minoris aequale maiori adplicatur figura quadrata deficiens, eam in partes longitudine commensurabiles diuidet.

Sint duae rectae inaequales A, $B\Gamma$, quarum maior sit $B\Gamma$, et quartae parti quadrati minoris A, hoc est $(\frac{1}{2} A)^2$, aequale spatium rectae $B\Gamma$ adplicetur figura

---

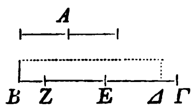
βληθῇ παραλληλόγραμμον V. Post ἑξῆς add. τῆς προτάσεως LBVb, F m. 2. 10. ιη' F m. 2; ιθ' B, mg. ιζ'. 11. ὦσιν P. 12. ἐλάττονος F. 13. τετραγώνῳ] in ras. m. 1 b. 14. μήκη F. 15. ἐλάττονος F. συμμέτρῳ F. 16. μήκει] om. P. ἄν F. ἡ] ἡ b, et F, sed corr. 17. ἐλάττονος F. μεῖζον] mg. m. 2 F, μείζονα b. 18. μήκει] om. P. Post τετάρτῳ add. μέρει b, F m. 2. ἐλάττονος F. 20. εἰς] in ras. V, corr. ex εἰ m. rec. b. αὐτῇ V, sed corr. 21. διελεῖ B, διέλῃ Vb et corr. in διελεῖ F. μήκη F. 22. μεῖζον b, μείζων ἔστω F. 23. ἐλάττονος F. 24. τῆς] $\overset{σύ}{τ}$ F. τουτέστιν P. τῷ] τό F, et V, sed corr. m. 1. τοῦ A B; τῇ A V, sed corr.

καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν *ΒΔ*, *ΔΓ*, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ *ΒΔ* τῇ *ΔΓ* μήκει· λέγω, ὅτι ἡ *ΒΓ* τῆς *Α* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ *ΒΓ* δίχα κατὰ τὸ *Ε* σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ *ΔΕ* ἴση ἡ *ΕΖ*. λοιπὴ ἄρα ἡ *ΔΓ* ἴση ἐστὶ τῇ *ΒΖ*. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ *ΒΓ* τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ *Ε*, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ *Δ*, τὸ ἄρα ὑπὸ *ΒΔ*, *ΔΓ* περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς *ΕΔ* τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΕΓ* τετραγώνῳ· καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν *ΒΔ*, *ΔΓ* μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀπὸ τῆς *ΔΕ* ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς *ΕΓ* τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τῶν *ΒΔ*, *ΔΓ* ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς *ΔΕ* ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΔΖ* τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστιν ἡ *ΔΖ* τῆς *ΔΕ*. τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς *ΕΓ* ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΓ* τετράγωνον· διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ *ΒΓ* τῆς *ΓΕ*. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *Α*, *ΔΖ* τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΒΓ* τετραγώνῳ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΓ* τοῦ ἀπὸ τῆς *Α* μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς *ΔΖ*· ἡ *ΒΓ* ἄρα τῆς *Α* μεῖζον δύναται τῇ *ΔΖ*. δεικτέον, ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ *ΒΓ* τῇ *ΔΖ*. ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ *ΒΔ* τῇ *ΔΓ* μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ΒΓ* τῇ *ΓΔ* μήκει. ἀλλὰ ἡ *ΓΔ* ταῖς *ΓΔ*, *ΒΖ* ἐστι σύμμετρος μήκει· ἴση γάρ ἐστιν ἡ *ΓΔ* τῇ *ΒΖ*. καὶ ἡ *ΒΓ* ἄρα σύμμετρός ἐστι ταῖς *ΒΖ*, *ΓΔ* μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ *ΖΔ* σύμμετρός ἐστιν ἡ *ΒΓ*

---

1. *ΔΓ*] *Γ* in ras. F. 3. Post ἑαυτῇ add. μήκει Vb, F m. 2. 5. *ΔΓ*] corr. ex *ΒΓ* m. rec. b. ἐστίν P. 7. ὑπὸ τῶν BFV. 9. ἐστίν P. 10. τά] m. 2 V. τό] τά B. *ΒΔ*] in ras. m. 1 P. 11. τετράκις Theon (BFVb). τοῦ] om.



quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$ [u. lemma], et $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles sint. dico, $B\Gamma^2$ excedere A^2 quadrato rectae sibi commensurabilis.

nam $B\Gamma$ in puncto E in duas partes aequales secetur, et ponatur $EZ = \Delta E$. itaque $\Delta\Gamma = BZ$. et quoniam recta $B\Gamma$ in E in partes aequales secta est, in Δ autem in inaequales, erit [II, 5]

$$B\Delta \times \Delta\Gamma + E\Delta^2 = E\Gamma^2.$$

et quadrupla eodem modo; quare

$$4\,B\Delta \times \Delta\Gamma + 4\,\Delta E^2 = 4\,E\Gamma^2.$$

uerum $A^2 = 4\,B\Delta \times \Delta\Gamma$, $\Delta Z^2 = 4\,\Delta E^2$ (nam $\Delta Z = 2\,\Delta E$), $B\Gamma^2 = 4\,E\Gamma^2$ (nam rursus $B\Gamma = 2\,\Gamma E$). itaque

$$A^2 + \Delta Z^2 = B\Gamma^2$$

quare $B\Gamma^2$ excedit A^2 quadrato ΔZ^2. demonstrandum, $B\Gamma$, ΔZ commensurabiles esse. nam quoniam $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt, $B\Gamma$ et $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XV]. uerum $\Gamma\Delta$ rectis $\Gamma\Delta$, BZ longitudine commensurabilis est; nam $\Gamma\Delta = BZ$. quare etiam $B\Gamma$ rectis BZ, $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis est [prop. XII]. quare $B\Gamma$ etiam

---

Theon (BFVb). *EΔ* FVb. *ἴσα* BF. 12. *ΓE* F. *τετραπλασίῳ τοῦ*] *τετράκις* Theon (BFVb). 13. *τῶν*] om. b. 14. *δέ*] postea ins. F. *τετράκις*, om. *τοῦ*, Theon (BFVb). 15. *τετράγωννον* P, corr. m. 1. 16. *ZΔ* P. *τετράκις*, om. *τοῦ*, Theon (BFVb). 18. *ΓE*] *EΓ* V. 19. *A*, *ΔZ*] e corr. V. *τετραγώνῳ*] □′ supra scr. m. 1 V. 20. Post *ὥστε* ras. 2 litt. V. 21. *τῇ*] corr. ex *τοῦ* F. *ZΔ* P. 22. *ZΔ* P. 23. *ἐστι* P, corr. m. 2. 24. *ἀλλ'* F. 25. *ZB* F. 26. *ταῖς BZ, ΓΔ ἐστι σύμμετρος* Theon (BFVb). *ἐστιν* P. 27. *μήκει*] *η* in ras. m. 1 P. *BΓ*] in ras. V.

μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δύναται δὲ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΓ [μήκει]. ὥστε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἐστι σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἑξῆς.

ιη΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ [μήκει], ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμ-

---

2. Post *ἑαυτῇ* add. *μήκει* V. 4. *τοῦ*] in ras. V. 8. *ὁμοίως δή* V. *δείξομεν*] *δει-* corr. ex *δη-* F. 9. Post ΖΔ del. m. 2: *οὕτω γὰρ ὑπόκειται* V. 10. *μεῖζον τῆς Α* P. 11. *ἑαυτῆς* P. 12. *καί*] m. 2 F. *συναμφοτέρῳ*] *-ῳ* e corr. V. *τῇ*] corr. ex *τῷ* F. 14. *τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι* Theon (BFVb; *τῇ ΔΓ* postea ins. F). *μήκει*] om. P. Dein add. Theon: *ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ* (BFVb; *τῇ* corr. in *τῆς* m. 2 F, *τῆς* b; ΓΔ F). *ὥστε*] om. Theon (BFVb). *ΒΓ ἄρα* Theon (BFVb).

reliquae $Z\Delta$ longitudine commensurabilis est. ergo $B\Gamma^2$ excedit A^2 quadrato rectae sibi commensurabilis.

Iam uero $B\Gamma^2$ excedat A^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et quartae parti quadrati A^2 aequale rectae $B\Gamma$ adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$ [u. lemma]. demonstrandum, $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles esse.

nam iisdem comparatis similiter demonstrabimus, esse $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. $B\Gamma^2$ autem quadrato rectae sibi commensurabilis excedit quadratum A^2. itaque $B\Gamma$, $Z\Delta$ longitudine commensurabiles sunt. quare $B\Gamma$ etiam reliquae $BZ + \Delta\Gamma$ longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum $BZ + \Delta\Gamma$ rectae $\Delta\Gamma$ commensurabilis est [prop. VI]. quare etiam $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XII]. itaque etiam dirimendo $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt.

Ergo si duae rectae inaequales datae sunt, et quae sequuntur.

XVIII.

Si duae rectae inaequales datae sunt, et quartae parti quadrati minoris aequale spatium maiori adplicatur figura quadrata deficiens, quod eam in partes incommensurabiles diuidat, maior quadrata minorem excedet quadrato rectae sibi incommensurabilis. et si maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi

---

σύμμετρός ἐστι τῇ $\Gamma\Delta$ Theon (BFVb; $\Delta\Gamma$ V). 15. *μήκει· καί*] om. Theon (BFVb). 17. *καὶ τὰ ἑξῆς*] *τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ τὰ ἑξῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι* V. 18. *κ'* B, *ιη'* mg. 19. *ὦσιν* B. 20. *ἐλάττονος* F. 22. *μήκει*] om. P, *μήκη* F. 23. *ἐλάττονος* F. *τό* F. *συμμέτρου* F.

μέτρου ἑαυτῇ. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ [μήκει].

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α, ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ [μέρει] τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΓ, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

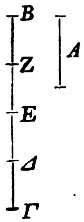
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. δεικτέον [οὖν], ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ, ΔΓ. ὥστε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Δυνάσθω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ,

---

1. καί — 2. ἑαυτῇ] om. b. 1. μεῖζον V, sed corr. ἐλάττονος F. 2. συμμέτρου F, et B, corr. m. 2. 3. ἐλάττονος F. 5. διαιρῆι P. μήκει] om. P, μήκη F. 7. ἐστὶν ἡ F. μέρει] mg. m. 1 P. τοῦ] τῷ F. ἐλάττονος F. 8. τῆς] τῇ F. 9. ΒΓΔ b; ΒΔ, ΔΓ V (ΔΓ in ras.), F, P m. rec. 11. συμμέτρου B, corr. m. rec. 12. τῷ] m. rec. B; τό P, corr. m. 2. προτέρῳ F. 14. ΔΖ V. οὖν] om. P. ὅτι καί P. 15.

incommensurabilis, et spatium quartae parti quadrati minoris aequale maiori adplicatur figura quadrata deficiens, eam in partes incommensurabiles diuidit.



Sint duae rectae inaequales A, $B\Gamma$, quarum maior sit $B\Gamma$, quartae autem parti quadrati minoris A aequale spatium rectae $B\Gamma$ adplicetur figura quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$ [u. lemma p. 46], et $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabiles sint. dico, $B\Gamma^2$ excedere A^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis.

iisdem enim, quae in priore propositione, comparatis similiter demonstrabimus, esse $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. demonstrandum, $B\Gamma$, ΔZ longitudine incommensurabiles esse. nam quoniam $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, etiam $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVI]. uerum $\Delta\Gamma$ rectae $BZ + \Delta\Gamma$ commensurabilis est [prop. VI]. quare etiam $B\Gamma$ rectae $BZ + \Delta\Gamma$ incommensurabilis est [prop. XIII]. itaque $B\Gamma$ etiam reliquae $Z\Delta$ longitudine incommensurabilis est [prop. XVI]; et $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. ergo $B\Gamma^2$ excedit A^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis.

Iam rursus $B\Gamma^2$ excedat A^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, et spatium aequale $\frac{1}{4} A^2$ rectae $B\Gamma$ adplicetur figura quadrata deficiens, et sit $B\Delta \times \Delta\Gamma$.

$Z\Delta$ B. 16. μήκει] om. Vb, m. 2 B. ἄρα] om. V. ἐστίν P, comp. F. καί] m. 2 F. 17. $\Gamma\Delta$] in ras. F. ἀλλ' F. ἡ] supra scr. m. 1 V. ἀσύμμετρος F. 18. καί — 19. $\Delta\Gamma$] m. 2 B. 20. $Z\Delta$] "Δ'Z F. $B\Gamma$] (prius) ΓB V. 21. $B\Gamma$] B in ras. m. 1 B. 22. συμμέτρον B, corr. m. 2; item lin. 24. 24. τοῦ] τῷ F.

καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ. δεικτέον, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. ἀλλὰ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥστε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ, ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ, ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥστε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἑξῆς.

Λῆμμα.

Ἐπεὶ δέδεικται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει [εἰσὶ σύμμετροι], αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει καὶ σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι, φανερόν, ὅτι, ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ

---

1. ΔΓ] m. 2 B. 2. ἡ ΔΒ ἐστιν F. 4. ΔΖ V. ἀλλ' FV. 5. συμμέτρου F, corr. m. 2. 6. ἑαυτῆς P, corr. m. 1. ἀσύμμετρα P, corr. m. 1. ΔΖ V. 8. τῇ ΔΓ] m. 2 F. ἀσύμμετρος F, sed corr. 9. ἐστιν P. καί] om. P. καί — 10. μήκει] mg. F. 10. Ante ὥστε del. ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ m. 1 P. 12. ὦσιν B. Post εὐθεῖαι add. ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ V. 13. λῆμμα] om. PBb. 14. ἐπεὶ δέ V. 15. εἰσὶ σύμμετροι] om. P. οὐ] σύμμετροι οὐ P. 16. ἀλλά — μήκει] mg. m. 1 P. δή] δηλαδή BVb, δὴ δηλαδή, del. δή, F. καὶ μήκει BFVb.

demonstrandum, $B\Delta$ et $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabiles esse.

iisdem enim comparatis similiter demonstrabimus, esse $B\Gamma^2 = A^2 + Z\Delta^2$. $B\Gamma^2$ autem A^2 excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis. itaque $B\Gamma$, $Z\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt. quare $B\Gamma$ etiam reliquae $BZ + \Delta\Gamma$ incommensurabilis est [prop. XVI]. uerum $BZ + \Delta\Gamma$ rectae $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabilis est [prop. VI]. quare etiam $B\Gamma$ rectae $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabilis est [prop. XIII]. itaque etiam dirimendo $B\Delta$ et $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVI].

Ergo si duae rectae, et quae sequuntur.

Lemma.

Quoniam demonstratum est [prop. IX coroll.], rectas longitudine commensurabiles semper etiam potentia commensurabiles esse, rectas autem potentia commensurabiles non semper etiam longitudine, sed posse longitudine tum commensurabiles esse tum incommensurabiles, adparet, si recta aliqua rationali propositae longitudine commensurabilis sit, eam rationalem eique commensurabilem uocari non modo longitudine, sed etiam potentia, quoniam rectae longitudine commensurabiles semper etiam potentia commensurabiles sunt; sin recta rationali propositae potentia commensurabilis sit, si etiam longitudine sit commensurabilis, eam sic quoque rationalem eique longitudine et potentia commensurabilem uocari; sin rursus recta rationali

19. αὕτη F. 20. ἐπεὶ αἱ] αἱ γάρ Theon (BFVb). 22. καί] (alt.) m. 2 B. αὕτη F.

μήκει καὶ δυνάμει· εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὖσα δυνάμει μήκει αὐτῇ ᾖ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

ιϑ΄.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατά τινα τῶν προειρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ῥητόν ἐστιν.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ *ΑΓ*· λέγω, ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ *ΑΓ*.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* τετράγωνον τὸ *ΑΔ*· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ *ΑΔ*. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ *ΑΒ* τῇ *ΒΓ* μήκει, ἴση δέ ἐστιν ἡ *ΑΒ* τῇ *ΒΔ*, σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΒΔ* τῇ *ΒΓ* μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ *ΒΔ* πρὸς τὴν *ΒΓ*, οὕτως τὸ *ΔΑ* πρὸς τὸ *ΑΓ*. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΔΑ* τῷ *ΑΓ*. ῥητὸν δὲ τὸ *ΔΑ*· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ *ΑΓ*.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

κ΄.

Ἐὰν ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ σύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει.

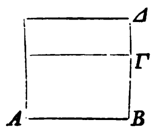
2. οὖσά τις FV. δυνάμει] -ει e corr., seq. spat. 2 litt. F. αὐτῇ ᾖ] ἡ αὐτή BFb, ᾖ V. 3. οὕτως] comp. e corr. F. μόνον] comp. mg. V (euan.). Seq. alt. lemma, u. app. 4. ιϑ΄] sic F, sed infra κ΄; mg. τμῆμα β΄ Fb. 5. μήκει — 6. προ-] in ras. m. 2 B. 5. εὐθειῶν κατά Theon (BFVb). 6. τρόπον? V. εὐθειῶν] om. Theon (BFVb). 8. εὐθειῶν τῶν] in ras. V. 12. τὸ *ΑΔ* ἄρα ῥητόν ἐστιν F. 13. *ΑΒ*] (alt.) *ΒΔ* B. *ΒΔ*] *ΔΒ* in ras. P, *ΒΑ* in ras. B. σύμμετρος — 14. *ΒΓ*] om. B; mg. m. 2: ἴση lin. 13 — μήκει lin. 14, ut nos. 15. οὕτω V. τό]

propositae commensurabilis potentia, eadem longitudine ei incommensurabilis sit, sic quoque eam rationalem uocari potentia tantum commensurabilem.

XIX.

Rectangulum comprehensum rectis rationalibus longitudineque commensurabilibus secundum aliquem modorum, quos diximus [u. lemma], rationale est.

Rectis enim rationalibus longitudine commensurabilibus AB, $B\Gamma$ rectangulum comprehendatur $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ rationale esse.



nam in AB construatur quadratum $A\Delta$. itaque $A\Delta$ rationale est [def. 4]. et quoniam AB, $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt, et $AB = B\Delta$, $B\Delta$ et $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt. et $B\Delta : B\Gamma = \Delta A : A\Gamma$ [VI, 1]. itaque ΔA, $A\Gamma$ commensurabilia sunt [prop. XI]. uerum ΔA rationale est. itaque etiam $A\Gamma$ rationale est [def. 4].

Ergo rectangulum comprehensum rectis rationalibus longitudineque commensurabilibus, et quae sequuntur.

XX.

Si spatium rationale rectae rationali adplicatur, latitudinem rationalem facit et ei longitudine commensurabilem, cui adplicatum est.

(alt.) corr. ex *τήν* m. rec. P. $A\Gamma$] e corr. P. 16. *ἐστίν* P, *ἐστὶ καί* V. *τό*] *τῷ* b. $A\Delta$ F. 17. *ἐστίν* P, om. FV. 18. *μήκει συμμέτρων*] om. BVb. Ante *καί* add. *εὐθειῶν* F. *καὶ τὰ ἑξῆς*] om. PV. 19. *κ'*] seq. ras. 1 litt. B, *κα'* F. 21. *ποιεῖ*] *-εῖ* e corr. m. 1 F. *τῇ*] corr. ex *τι* m. rec. b.

Ῥητὸν γὰρ τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν κατά τινα πάλιν τῶν προειρημένων τρόπων τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΒΓ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΑ μήκει.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. καί ἐστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ, καὶ τὰ ἑξῆς.

κα΄.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.

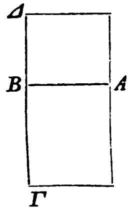
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν

---

1. ῥητὴν τὴν ΑΒ V. 2. εἰρημένων Theon (BFVb). τὴν ΑΒ] om. V. 3. πόοῦν P. 4. ΑΒ P. 5. ΑΒ] corr. ex ΑΓ m. 2 F. 6. ἐστίν P. ΑΓ] ΓΑ F. 7. ἐστίν P. ΔΑ] ΑΔ V. 8. τήν] om. BFb. 9. ἐστίν P. ΔΒ] (alt.) post ras. V, ΒΔ F. 10. ΒΑ] Α e corr. m. 1 P. ἄρα — τῇ] in ras. m. 1 P. 12. ΒΑ BVb. 13. ἂν F. παρὰ ῥητήν] om. F. παραβληθῇ] om. P. Seq. lemma, u. app. 14.

Rationale enim spatium $A\Gamma$ rectae AB rationali rursus secundum aliquem modorum, quos diximus [u. lemma p. 56], adplicetur latitudinem faciens $B\Gamma$. dico, $B\Gamma$ rationalem esse et rectae BA longitudine commensurabilem.

construatur enim in AB quadratum $A\Delta$. $A\Delta$ igitur rationale est [def. 4]. uerum etiam $A\Gamma$ rationale est. itaque ΔA, $A\Gamma$ commensurabilia sunt. et $\Delta A : A\Gamma = \Delta B : B\Gamma$ [VI, 1]. itaque ΔB, $B\Gamma$ commensurabiles sunt [prop. XI]. uerum $\Delta B = BA$. itaque etiam AB, $B\Gamma$ commensurabiles sunt. sed AB rationalis est. itaque etiam $B\Gamma$ rationalis est et rectae AB longitudine commensurabilis [def. 3].



Ergo si spatium rationale rectae rationali adplicatur, et quae sequuntur.

XXI.

Rectangulum rectis rationalibus potentia tantum commensurabilibus comprehensum irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis est, uocetur autem media.

Rectis enim rationalibus et potentia tantum commensurabilibus AB, $B\Gamma$ rectangulum $A\Gamma$ comprehendatur. dico, rectangulum $A\Gamma$ irrationale esse, et rectam ei aequalem quadratam irrationalem; uocetur autem media.

nam in AB quadratum construatur $A\Delta$. itaque $A\Delta$ rationale est [def. 4]. et quoniam AB, $B\Gamma$ longi-

---

κα'] α in ras. m. 1 B, κβ' F et sic deinceps. 15. Post ῥητῶν add. δύο B. 16. ἐστι PBV, comp. Fb. 17. ἐστι BV, comp. Fb, ἔσται P. 22. ἐστι PBV, comp. Fb.

ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι· ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ [τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη] ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

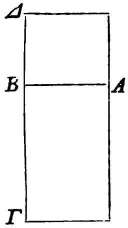
Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ, ΕΗ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ.

ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΔ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ, καί ἐστι τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν

---

1. ΒΓ] ΓΒ V. γάρ] comp. F, supra scr. δέ. 3. ἐστίν B. ΔΒ] (alt.) ΒΔ P. 4. ΑΓ] corr. ex ΑΒ m. rec. P. 5. ἐστίν B, om P. ΑΔ FV. ΑΔ F. 6. ἐστίν P. 7. ἡ] supra scr. m. 2 V. 8. ἐστι PV, comp. Fb. Ante ὅπερ add. P: διὰ τὸ (mg. m. 1) τὴν ἴσον ἀναγράφουσαν τετράγωνον τῷ ΑΓ χωρίῳ, ἣν καλεῖ μέσην, μέσην ἀνάλογον εἶναι τῶν ΑΒ, ΒΓ; eodem loco Theon: διὰ τὸ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίγνεσθαι (γίεσθαι BV) τῶν ΑΒ, ΒΓ (BFVb). 9. λῆμμα γ' V (cfr. app.). 10. ὦσιν B. ὡς] δὲ ὡς F. 11. πρός] supra scr. m. 1 F.



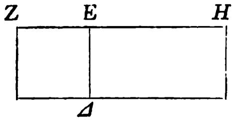
tudine incommensurabiles sunt (supposuimus enim, eas potentia tantum commensurabiles esse), et $AB = B\Delta$, etiam ΔB, $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt. et $\Delta B : B\Gamma = A\Delta : A\Gamma$ [VI, 1]. itaque ΔA, $A\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum ΔA rationale est; quare $A\Gamma$ irrationale est [def. 4]. itaque etiam recta spatio $A\Gamma$ aequalis quadrata[1]) irrationalis est [def. 4]; uocetur autem media; quod erat demonstrandum.

Lemma.

Datis duabus rectis est ut prima ad secundam, ita quadratum primae ad rectangulum duarum illarum rectarum.

Datae sint duae rectae ZE, EH. dico, esse

$$ZE : EH = ZE^2 : ZE \times EH.$$



describatur enim in ZE quadratum ΔZ, et expleatur $H\Delta$. iam quoniam est $ZE : EH = Z\Delta : \Delta H$ [VI, 1], et $Z\Delta = ZE^2$, $\Delta H = \Delta E \times EH = ZE \times EH$, erit

$$ZE : EH = ZE^2 : ZE \times EH.$$

1) Uerba τουτέστιν — δυναμένη lin. 7, quae nihil explicant, subditicia habeo (pro δυναμένη Augustus coni. ἀναγράφουσα). quae adiiciuntur lin. 8 (u. not. crit.) in P apertissime scholiastae sunt (καλεῖ); quare etiam additamentum simile codd. Theoninorum ipsi Theoni, non Euclidi tribuendum est.

ὑπό] corr. ex ἀπό Fb. 14. πρός — ZE] mg. m. 2 B. EH] HE F. 17. τό] corr. ex τῆς F. 18. τήν] om. b. ἐστιν P. 19. τὸ ὑπό — 20. τουτέστι] supra scr. F. 20. τουτέστιν P. 22. καὶ ὡς] ins. m. 2 F.

ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ΄.

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. δυνάσθω τὸ ΗΖ. δύναται δὲ καὶ τὸ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ ΗΖ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν δὲ ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ,

---

2. ΖΔ] corr. ex ΔΖ V, ΔΖ BFb. ΗΕ] in ras. V. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. Theon (BFVb). 6. σύμμετρον P. corr. m. 2. τῇ] corr. ex τι m. rec. b. 8. καί — 9. χωρίον] in ras. F. 9. ὀρθογώνιον] m. rec. V. 13. μόνον] in ras. F.

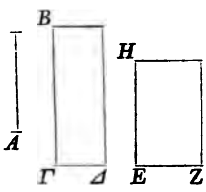
similiter etiam $HE \times EZ : EZ^2 = H\Delta : Z\Delta = HE : EZ$; quod erat demonstrandum.

XXII.

Quadratum mediae rationali adplicatum latitudinem facit rationalem et ei, cui adplicatum est, longitudine incommensurabilem.

Sit media A, rationalis autem ΓB, et quadrato A^2 aequale rectae $B\Gamma$ adplicetur spatium rectangulum $B\Delta$ latitudinem faciens $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ rationalem esse et rectae ΓB longitudine incommensurabilem.

nam quoniam media est A, quadrata aequalis est spatio rectis potentia tantum commensurabilibus comprehenso [prop. XXI]. sit quadrata aequalis HZ. uerum quadrata etiam spatio $B\Delta$ aequalis est. itaque $B\Delta = HZ$. uerum idem ei aequiangulum est. parallelogrammorum autem aequalium et aequiangulorum latera aequales angulos comprehendentia in contraria proportione sunt [VI, 14]. itaque $B\Gamma : EH = EZ : \Gamma\Delta$. quare etiam $B\Gamma^2 : EH^2 = EZ^2 : \Gamma\Delta^2$ [VI, 20]. uerum ΓB^2 et EH^2 commensurabilia sunt; nam utraque rationalis est. quare etiam EZ^2 et $\Gamma\Delta^2$ commensurabilia sunt [prop. XI]. uerum EZ^2 rationale est; quare etiam $\Gamma\Delta^2$ rationale est [def. 4]. itaque $\Gamma\Delta$ rationalis est. et quoniam EZ, EH longitudine incommensurabiles sunt (nam potentia tantum commensurabiles sunt), et est



14. δύναται] δύνασθαι b. ΔB P. 15. ἐστίν P. ΔB P. ἔστιν PB. αὐτό FV. 16. τε] corr. ex δέ m. 1 P, om. FV. 21. ΓB] e corr. V, $B\Gamma$ F. 23. ἐστίν P. 24. ἐστιν P. ἐστίν P. 25. ἐστίν] postea ins. F. 26. HE F.

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΖΕ*, *ΕΗ*, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* τῷ ὑπὸ τῶν *ΖΕ*, *ΕΗ*. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *ΕΖ* σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΓΔ*· ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν *ΖΕ*, *ΕΗ* σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν *ΔΓ*, *ΓΒ*· ἴσα γάρ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς *Α*· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΓΔ* τῷ ὑπὸ τῶν *ΔΓ*, *ΓΒ*. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ΓΔ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΔΓ*, *ΓΒ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΔΓ* πρὸς τὴν *ΓΒ*· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΔΓ* τῇ *ΓΒ* μήκει. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΔ* καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΓΒ* μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κγ΄.

Η τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν.

Ἔστω μέση ἡ *Α*, καὶ τῇ *Α* σύμμετρος ἔστω ἡ *Β*· λέγω, ὅτι καὶ ἡ *Β* μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ *ΓΔ*, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *Α* ἴσον παρὰ τὴν *ΓΔ* παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ *ΓΕ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΕΔ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΕΔ* καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΓΔ* μήκει. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *Β* ἴσον παρὰ τὴν *ΓΔ* παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ *ΓΖ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΔΖ*. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ *Α* τῇ *Β*, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τῷ ἀπὸ τῆς *Β*. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *Α* ἴσον ἐστὶ τὸ *ΕΓ*, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *Β* ἴσον ἐστὶ τὸ *ΓΖ*· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΕΓ* τῷ *ΓΖ*. καί

---

2. *ἐστιν ἄρα* FV. *ἐστί*] om. P. 3. *τῷ*] corr. ex *τό* V. *ἐστι*] om. V. 4. *εἴσιν* P. *δυνάμει*] eras. V, dein add. *ὡς ἄρα δέδεικται*. 5. *συμμέτρων* P, corr. m. 1. *ἐστι*] om. BFb. 6. *εἰσι* BVb. *σύμμετρον* F, sed corr. *ἐστίν* P. 7. *ΓΒ περιεχομένῳ* V. 8. *ΓΔ*] *ΔΓ* F. 9. *ΓΒ*] *ΓΑ* b. *ἐστίν*] om. b. 11. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BFb, comp. P. 12. *κγ΄*]

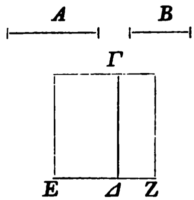
$EZ : EH = EZ^2 : ZE \times EH$ [u. lemma], EZ^2 et $ZE \times EH$ incommensurabilia erunt [prop. XI]. uerum EZ^2 et $\Gamma\Delta^2$ commensurabilia sunt (nam potentia rationales sunt); et $ZE \times EH$, $\Delta\Gamma \times \Gamma B$ commensurabilia sunt (nam quadrato A^2 aequalia sunt). itaque etiam $\Gamma\Delta^2$ et $\Delta\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. uerum $\Gamma\Delta^2 : \Delta\Gamma \times \Gamma B = \Delta\Gamma : \Gamma B$ [u. lemma]. itaque $\Delta\Gamma$, ΓB longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. ergo $\Gamma\Delta$ rationalis est et rectae ΓB longitudine incommensurabilis; quod erat demonstrandum.

XXIII.

Recta mediae commensurabilis media est.

Sit media A, et rectae A commensurabilis sit B. dico, etiam B mediam esse.

ponatur enim rationalis $\Gamma\Delta$, et quadrato A^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur spatium rectangulum ΓE latitudinem faciens $E\Delta$. itaque $E\Delta$ rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. quadrato autem B^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur spatium rectangulum ΓZ latitudinem faciens ΔZ. iam quoniam A et B commensurabiles sunt, etiam A^2 et B^2 commensurabilia sunt. uerum $A^2 = E\Gamma$, $B^2 = \Gamma Z$. itaque $E\Gamma$, ΓZ commensurabilia sunt. et $E\Gamma : \Gamma Z = E\Delta : \Delta Z$ [VI, 1]. itaque $E\Delta$, ΔZ longitudine commen-



om. P. 14. ἔστω] (alt.) om. BFb. 16. τῷ] τό F. 20. $\Delta\Gamma$ BVb. 21. ΓZ] corr. ex EZ F. $Z\Delta$ P. ἐπί P, corr. m. rec. 22. ἐστι] postea ins. F, ἐστιν P. 23. A] corr. ex AB V, A ἐστι F. 24. ἐστί] (alt.) om. Vb. 25. ΓZ] (prius) Z in ras. m. 1 P.

ἐστιν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΕΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυναμένη μέση ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυναμένη μέση ἐστίν· καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἐστὶν ἡ Β.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν [δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι, αἵ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν].

Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ, τὴν τῇ μέσῃ μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσην καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει, εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

---

4. *ἐστίν* PB. 5. *εἰσιν* PB. 6. *ἡ δὲ τό*] *τὸ δὲ* BFVb. Post *συμμέτρων* add. *εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι καί* b, F mg. m. 1, V m. 2; deinde seq. *αὐτὸ ἄλογόν ἐστι, καλείσθω δέ* b, F mg. m. 1; *ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μέση* V m. 2. *ἡ δυναμένη* BFb, et V (del. punctis). 7. *μέση*] supra scr. F. *μέση ἐστίν*] punctis del. V. *ἡ*] m. 2 B. *δυναμένη*] *δυνάμει ἡ* b. 8. *ἐστί* Vb, comp. F. 9. *ἡ Β*] (prius) *ΗΒ* Bb. 12. *ἐστί* BV, comp. F. *αὐτά*] *-τά* in ras. V, *αὐτῷ* F, *αὐτό αἵ* B, *αἵ* add. m. 2 V. 13. *εἰσιν*

surabiles sunt [prop. XI]. uerum $E\Delta$ rationalis est et rectae $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabilis. itaque etiam ΔZ rationalis est [def. 3] et rectae $\Delta\Gamma$ longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. itaque $\Gamma\Delta$, ΔZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. recta autem quadrata aequalis spatio rectis potentia tantum commensurabilibus comprehenso media est [prop. XXI]. itaque recta quadrata spatio $\Gamma\Delta \times \Delta Z$ aequalis media est. et $B^2 = \Gamma\Delta \times \Delta Z$. ergo B media est.

Corollarium.

Hinc manifestum est, spatium spatio medio aequale medium esse.[1])

Lemma.

Congruenter iis, quae de rationalibus diximus [prop. XVIII coroll.], etiam in mediis sequitur, rectam mediae longitudine commensurabilem mediam uocari ei non modo longitudine, sed etiam potentia commensurabilem, quoniam omnino rectae longitudine commensurabiles semper etiam potentia commensurabiles sunt. sin recta mediae potentia commensurabilis est, si eadem longitudine est commensurabilis, sic quoque mediae et longitudine potentiaque commensurabiles uocantur, sin potentia tantum, mediae potentia tantum commensurabiles uocantur.

1) Sequentia lin. 12—14 obscura sunt et sine dubio subditiua.

PB. 20. *εἰ μέν* — 21. *δὲ δυνάμει*] om. Fb; post *σύμμετροι* lin. 22 ea hab. V (punctis del., add. *τὸ δὲ ἑξῆς οὐχ εὑρέθη ἐν τῷ βιβλίῳ τοῦ ἐφεσίου καὶ ἐπατήθη?*) et B mg. m. 2 (add. in fine *μόνον*). 22. *μόνον*] (prius) del. m. 2 B. *σύμμετροι*] m. 2 B. Seq. lemma, u. app.

κδ'.

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατά τινα τῶν εἰρημένων τρόπων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον ἐστίν.

Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ *ΑΓ*· λέγω, ὅτι τὸ *ΑΓ* μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* τετράγωνον τὸ *ΑΔ*· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΑΔ*. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ *ΑΒ* τῇ *ΒΓ* μήκει, ἴση δὲ ἡ *ΑΒ* τῇ *ΒΔ*, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ΔΒ* τῇ *ΒΓ* μήκει· ὥστε καὶ τὸ *ΔΑ* τῷ *ΑΓ* σύμμετρόν ἐστιν. μέσον δὲ τὸ *ΔΑ*· μέσον ἄρα καὶ τὸ *ΑΓ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε'.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ὑπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ *ΑΓ*· λέγω, ὅτι τὸ *ΑΓ* ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* τετράγωνα τὰ *ΑΔ*, *ΒΕ*· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν *ΑΔ*, *ΒΕ*. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *ΖΗ*, καὶ τῷ μὲν *ΑΔ* ἴσον παρὰ τὴν *ΖΗ* παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ *ΗΘ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΖΘ*, τῷ δὲ *ΑΓ* ἴσον παρὰ τὴν *ΘΜ* παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλλη-

---

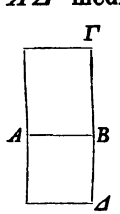
3. *κατά — τρόπων*] om. BFb, supra scr. m. 2 V (*κατά τινα τῶν* eras.). 6. *περιέχεσθαι* B, corr. m. 2. 9. *ΑΔ*] (prius) inter *Α* et *Δ* ras. 1 litt. V. 11. *ἐστίν* PB. *ΔΒ*] e corr. m. 2 V, *ΒΔ* F. 12. *ἐστι* V, comp. Fb. *ΔΑ*] e corr. m. 2 V. 16. *εὐθειῶν*] m. 2 V. 19. *περιεχέσθω ὀρθογώνιον* P.

XXIV.

Rectangulum rectis mediis comprehensum secundum aliquem modorum, quos diximus [u. lemma], commensurabilibus medium est.

Mediis enim AB, $B\Gamma$ longitudine commensurabilibus comprehendatur rectangulum $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ medium esse.

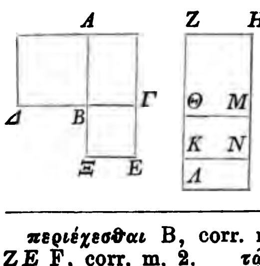
nam in AB quadratum describatur $A\Delta$. itaque $A\Delta$ medium est. et quoniam AB, $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt, et $AB = B\Delta$, etiam ΔB, $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt. quare etiam ΔA, $A\Gamma$ commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. uerum ΔA medium est. ergo etiam $A\Gamma$ medium est [prop. XXIII coroll.]; quod erat demonstrandum.



XXV.

Rectangulum rectis mediis potentia tantum commensurabilibus comprehensum aut rationale aut medium est.

Rectis enim mediis AB, $B\Gamma$ potentia tantum commensurabilibus comprehendatur rectangulum $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ aut rationale aut medium esse.



nam in AB, $B\Gamma$ quadrata describantur $A\Delta$, BE. itaque utrumque $A\Delta$, BE medium est. et ponatur rationalis ZH, et quadrato $A\Delta$ aequale rectae ZH adplicetur parallelogrammum rect-

περιέχεσθαι B, corr. m. 2. 20. ἐστιν ἢ μέσον V. 23. ZE F, corr. m. 2. τῷ] corr. ex τό V. 25. τήν] corr. ex τό m. 2. F

λόγραμμον τὸ ΜΚ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ, καὶ ἔτι τῷ ΒΕ ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν ΚΝ παραβεβλήσθω τὸ ΝΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ, ΘΚ, ΚΛ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ, ΒΕ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ τῷ ΝΛ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΗΘ, ΝΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΚΛ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΔ τῷ ΒΕ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΗΘ τῷ ΝΛ. καί ἐστιν ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΚΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΚΛ μήκει. αἱ ΖΘ, ΚΛ ἄρα ῥηταί εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΑ, ἡ δὲ ΞΒ τῇ ΒΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΞ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΞ. ἴσον δέ ἐστι τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΞ τῷ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ, οὕτως τὸ ΜΚ πρὸς τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ, ΚΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΘΝ·

2. *ἴσον — ΚΝ*] mg. m. 1 F, in textu *ἄλλῳ παρὰ τὴν ΚΝ*. 4. *αἱ*] corr. ex *ταί* F m. 1, supra m. 2 P. 6. *ΝΛ*] *Ν* e corr. V. *ἄρα ἐστί* V. 7. *ΝΛ*] *ΜΛ* b et F (*Μ* in ras.). Ante *ῥητή* ras. 5 litt. V. 8. *ἐστίν*] *ἐστὶ καί* V. 9. *καὶ ἐπεί*] *ἐπεὶ οὖν* Theon (BFVb). 10. *ἐστίν* P. *τό*] m. 2 F. *ΘΗ* F.

angulum $H\Theta$ latitudinem faciens $Z\Theta$, rectangulo autem $A\Gamma$ aequale rectae ΘM adplicetur parallelogrammum rectangulum MK latitudinem faciens ΘK, et praeterea quadrato BE aequale similiter rectae KN adplicetur $N\Lambda$ latitudinem faciens $K\Lambda$. itaque $Z\Theta$, ΘK, $K\Lambda$ in eadem recta sunt. iam quoniam utrumque $A\Delta$, BE medium est, et $A\Delta = H\Theta$, $BE = N\Lambda$, etiam utrumque $H\Theta$, $N\Lambda$ medium est. et rationali ZH adplicata sunt. itaque utraque $Z\Theta$, $K\Lambda$ rationalis est et rectae ZH longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $A\Delta$, BE commensurabilia sunt, etiam $H\Theta$, $N\Lambda$ commensurabilia sunt. et $H\Theta : N\Lambda = Z\Theta : K\Lambda$ [VI, 1]. itaque $Z\Theta$, $K\Lambda$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XI]. itaque $Z\Theta$, $K\Lambda$ rationales sunt longitudine commensurabiles. itaque $Z\Theta \times K\Lambda$ rationale est [prop. XIX]. et quoniam $\Delta B = BA$, $\Xi B = B\Gamma$, erit $\Delta B : B\Gamma = AB : B\Xi$. uerum $\Delta B : B\Gamma = \Delta A : A\Gamma$ [VI, 1], et $AB : B\Xi = A\Gamma : \Gamma\Xi$ [VI, 1]. quare $\Delta A : A\Gamma = A\Gamma : \Gamma\Xi$. uerum $A\Delta = H\Theta$, $A\Gamma = MK$, $\Gamma\Xi = N\Lambda$. ergo $H\Theta : MK = MK : N\Lambda$. quare etiam $Z\Theta : \Theta K = \Theta K : K\Lambda$ [VI, 1]. itaque $Z\Theta \times K\Lambda = \Theta K^2$ [VI, 17]. uerum $Z\Theta \times K\Lambda$ rationale est. quare etiam ΘK^2 rationale est. itaque ΘK rationalis est. et si rectae ZH longitudine commensurabilis est, ΘN rationale est [prop. XIX]; sin

---

καί] om. FV. Post ἐστιν add. ἄρα καί V. 11. ΘH F. τόν P, sed corr. ΛN e corr. m. 2 V. τήν] om. Bb. 13. ἐστίν P. 14. ΔB] e corr. Vb. 15. ΞB] corr. ex ZB V. ΔB] $B\Delta$ F. 16. $B\Xi$] corr. ex BZ P. 17. τήν] corr. in τό F, τό b. 18. ΞB B. ἔστιν — 20. $\Gamma\Xi$] mg. m. 2 B. 19. ΔA] in ras. V. $A\Gamma$] (alt.) ΓA F. 20. $\Gamma\Xi$] in ras. V. ἔστιν P. 24. ἐστίν P. 25. ἐστίν PB. 27. ἐστι P. Post τῇ add. ΘM τουτέστι τῇ V, B. m. 2 (del. m. rec.). ΘN] e corr. m. 2 V.

εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, αἱ ΚΘ, ΘΜ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΘΝ. τὸ ΘΝ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. ἴσον δὲ τὸ ΘΝ τῷ ΑΓ· τὸ ΑΓ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων, καὶ τὰ ἑξῆς.

κϛ´.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἐστιν ἴσον. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ΔΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καί ἐστι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΘΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΚΘ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητή ἐστι

---

1. ΚΘ] corr. in ΘΚ m. 2 V. ΘΝ B, ΘΜ ἄρα P. 2. εἰσιν PB. ΘΝ] in ras. V. 3. ἤτοι] om. Fb. ἐστιν ἢ μέσον V. 4. ἐστί BV, comp. Fb. 5. τὸ ἄρα] τῶν δέ F. μόνων F. καὶ τὰ ἑξῆς] εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν: ~ P. 6. Post ἑξῆς add. ὅπερ ἔδει δεῖξαι V. 7. κη´ P, corr. m. rec. 10. ὑπερέχει F, sed corr. 11. τῷ] τῷ μέν B, τὸ μέν b. 14. ΘΚ F. 15. ΔΒ] in ras. V. ἐστίν P. ΘΚ b. 16. ἐστι] ἐστιν B. 17. καί] om. b. 18. παράκεινται V. 21. ἐστί] ἐστίν P. 22. Post καί ras. 1 litt. V.

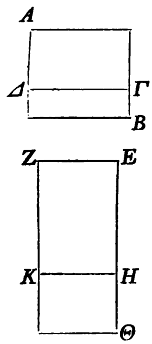
rectae ZH longitudine incommensurabilis est, $K\Theta$, ΘM rationales sunt potentia tantum commensurabiles; quare ΘN medium est [prop. XXI]. ΘN igitur aut rationale aut medium est. uerum $\Theta N = A\Gamma$. $A\Gamma$ igitur aut rationale est aut medium.

Ergo rectangulum mediis potentia tantum commensurabilibus, et quae sequuntur.

XXVI.

Spatium medium non excedit medium spatio rationali.

Si enim fieri potest, medium AB excedat medium $A\Gamma$ rationali ΔB, et ponatur rationalis EZ, et spatio AB aequale rectae EZ adplicetur parallelogrammum rectangulum $Z\Theta$ latitudinem faciens $E\Theta$, spatio autem $A\Gamma$ aequale subtrahatur ZH. itaque relinquitur $B\Delta = K\Theta$. uerum ΔB rationale est. itaque etiam $K\Theta$ rationale est. iam quoniam utrumque AB, $A\Gamma$ medium est, et $AB = Z\Theta$, $A\Gamma = ZH$, etiam utrumque $Z\Theta$, ZH medium est. et rectae rationali EZ adplicata sunt. ergo utraque ΘE, EH rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam ΔB rationale est et spatio $K\Theta$ aequale, etiam $K\Theta$ rationale est.[1]) et rectae rationali EZ adplicatum est; itaque $H\Theta$ rationalis est et rectae EZ longitudine commensurabilis [prop. XX]. uerum etiam



1) Uerba τὸ ΔB lin. 20 — ἐστὶ καί lin. 21 post lin. 14—15 superuacua sunt et fortasse interpolata. uerba ῥητὸν δέ lin. 14 — τὸ $K\Theta$ lin. 15 damnauit August.

καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τά τε ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ. ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ΄.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ.

Καὶ ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Γ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, [οὕτως] ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ Α, Β

4. ἀσύμετρον b. τό] e corr. b. 7. τό] corr. ex τῷ B. 8. τῶν om. BF. 9. ἐστίν P. 10. τῶν] (prius) om. B. 11. τῶν] m. 2 F, om. B. ἐστίν PB. τὸ ἀπό] in ras. m. 1 P,

EH rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis. quare EH, $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et $EH : H\Theta = EH^2 : EH \times H\Theta$ [prop. XXI lemma]. quare EH^2, $EH \times H\Theta$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum quadrato EH^2 commensurabilia sunt $EH^2 + H\Theta^2$ (nam utrumque rationale est); et spatio $EH \times H\Theta$ commensurabile est $2\, EH \times H\Theta$ [prop. VI]; nam eo duplo maius est. itaque $EH^2 + H\Theta^2$ et $2\, EH \times H\Theta$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. itaque etiam $EH^2 + H\Theta^2 + 2\, EH \times H\Theta$, hoc est $E\Theta^2$ [II, 4], quadratis $EH^2 + H\Theta^2$ incommensurabile est [prop. XVI]. uerum $EH^2 + H\Theta^2$ rationalia sunt. quare $E\Theta^2$ irrationale est [def. 4]. itaque $E\Theta$ irrationalis est [id.]. uerum eadem rationalis est; quod fieri non potest.

Ergo spatium medium non excedit medium spatio rationali; quod erat demonstrandum.

XXVII.

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes.

Ponantur duae rationales potentia tantum commensurabiles A, B, et sumatur earum media proportionalis Γ [VI, 13], et fiat $A : B = \Gamma : \Delta$ [VI, 12]. et quoniam A, B rationales sunt potentia tantum commensurabiles, $A \times B$ medium erit [prop. XXI], hoc est Γ^2 [VI, 17].

τὰ ἀπό b. 13. ῥητά — $H\Theta$] mg. m. 1 P. Seq. ras. 1 litt. V. 14. ἄλογον b. 15. ἀδύνατον] -ατον in ras. V. 16. μέσον — 17. δεῖξαι] om. BFb; μέσον ἄρα μέσον in ras. m. 2 V; μέσον ἄρα μέσον οὐχ ὑπερέχει m. 2 B, καὶ τὰ ἑξῆς add. m. rec. 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P. 18. κϛ' P, corr. m. rec. 25. εἰσιν PB. 26. τουτέστιν P. 27. ἐστίν] comp. Fb, ἐστί PBV. 28. οὕτως] om. P.

δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι, καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί ἐστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Β πρὸς τὴν Δ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· το ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

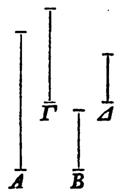
Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν [τρεῖς] ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε.

Ἐπεὶ αἱ Α, Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ αἱ Β, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καί ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ,

1. εἰσί] om. BFVb. καί — 2. σύμμετροι] om. B. 2. ἐστιν B. 3. εἰσίν B. 4. καὶ λέγω δή F, λέγω δή Vb. 10. ἐστί] om. BFVb. ὑπό] bis b. 12. ηὕρηνται FVb. 13. ῥητόν — δεῖξαι] καὶ τὰ ἑξῆς P. Seq. lemma, u. app. 14. κζ´ P, corr. m. rec. 17. Ante τρεῖς add. γάρ b, m. 2 FV. τρεῖς] om. P, τρεῖς εὐθεῖαι F. ἀσύμμετροι b. 19. Γ οὕτως V. 21. οὖν αἱ F. εἰσιν B, corr. m. 2. 22. τουτέστι P. 23.

itaque Γ media est [prop. XXI]. et quoniam est $A:B = \Gamma:\Delta$, et A, B potentia tantum commensurabiles sunt, etiam Γ, Δ potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. et Γ media est. itaque etiam

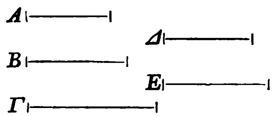


Δ media est [prop. XXIII]. Γ, Δ igitur mediae sunt potentia tantum commensurabiles. dico, easdem spatium rationale comprehendere. nam quoniam est $A:B = \Gamma:\Delta$, permutando [V, 16] est $A:\Gamma = B:\Delta$. uerum $A:\Gamma = \Gamma:B$. quare etiam $\Gamma:B = B:\Delta$ [V, 11]. itaque $\Gamma \times \Delta = B^2$ [VI, 17]. B^2 autem rationale est. itaque etiam $\Gamma \times \Delta$ rationale est.

Ergo inuentae sunt mediae potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes; quod erat demonstrandum.

XXVIII.

Medias inuenire potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehendentes [cfr. prop. XXV].



Ponantur rationales potentia tantum commensurabiles A, B, Γ, et sumatur rectarum A, B media proportionalis Δ [VI, 13], et fiat $B:\Gamma = \Delta:E$ [VI, 12].

quoniam A, B rationales sunt potentia tantum commensurabiles, $A \times B$ medium est [prop. XXI], hoc est Δ^2 [VI, 17]. itaque Δ media est [prop. XXI]. et

XXVIII. Cfr. Proclus p. 205, 10.

ἐστί BVb, comp. F. Γ, B B. 24. Post σύμμετροι rep. τὸ ἄρα lin. 22 — Δ lin. 23 B, del. m. 2. 24. τήν] om. b. Γ οὕτως V.

ἡ Δ προς την Ε, καὶ αἱ Δ, Ε ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ, Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ, ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ, ἡ Δ πρὸς τὴν Α· καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α, ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔστωσαν δὲ ἤτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. καὶ ἐπεί, ἐάν τε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάν τε ἀπὸ περισσοῦ περισσός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν, ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστιν. τετμήσθω ὁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ. ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνῳ. καί ἐστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπειδήπερ ἐδείχθη, ὅτι, ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν. εὕρηνται ἄρα δύο τετρά-

---

1. σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσί V. μόνον] om. P. εἰσίν P. 3. εἰσίν P. 5. οὕτως ἡ Δ V. 6. ἡ Γ — τὴν Δ] m. 2 B. 6. ὡς — 7. Α (prius)] mg. m. 1 F. 8. οὕτως ἡ

quoniam B, Γ potentia tantum commensurabiles sunt, et est $B:\Gamma = \Delta:E$, etiam Δ, E potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. uerum Δ media est; itaque etiam E media est [prop. XXIII]. quare Δ, E mediae sunt potentia tantum commensurabiles.

iam dico, easdem spatium medium comprehendere. nam quoniam est $B:\Gamma = \Delta:E$, permutando [V, 16] erit $B:\Delta = \Gamma:E$. uerum $B:\Delta = \Delta:A$. itaque etiam $\Delta:A = \Gamma:E$. quare $A \times \Gamma = \Delta \times E$ [VI, 16]. sed $A \times \Gamma$ medium est. itaque etiam $\Delta \times E$ medium est.

Ergo inuentae sunt mediae potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes; quod erat demonstrandum.

Lemma I.

Inuenire duos numeros quadratos eiusmodi, ut etiam numerus ex iis compositus quadratus sit.

ponantur duo numeri AB, $B\Gamma$, et aut pares sint aut impares. et quoniam, siue a numero pari par subtrahitur, siue ab impari impar, reliquus par est [IX, 24, 26], reliquus $A\Gamma$ par est. in duas partes aequales secetur $A\Gamma$ in Δ. sint autem AB, $B\Gamma$ etiam aut similes plani aut quadrati, qui et ipsi similes sunt plani. itaque $AB \times B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2$ [II, 6]. et $AB \times B\Gamma$ quadratus est, quoniam de-



Γ F. 11. ηὕρηνται Vb. μέσαι] om. V. μέσον — 12. δεῖξαι] καὶ τὰ ἑξῆς P. 12. ὅπερ — δεῖξαι] om. BFb. 14. ἀριθμούς] m. 2 F. 16. Ante οἱ add. ὅμοιοι ἐπίπεδοι mg. m. 2 B. 17. δή V. ἐπεί] supra scr. m. 1 F. τε] om. V. 18. περιττοῦ περιττός V et b, sed corr. m. 1. 20. ἐστι BV, comp. Fb. ΓA P. 22. οἵ] ἡ b. ἐκ] ὑπό V, corr. ex ἀπό m. 1 b. 23. τοῦ $\Gamma\Delta$] $\Gamma\Delta$ B (corr. m. rec.) et b, τῆς $\Gamma\Delta$ P. 24. ΔB P. τετραγώνου P, corr. m 1. ἐστιν B. 25. ἐδείχθη] om. b. 26. ποιῶσιν B. 27. ηὕρηνται FVb.

γωνοι ἀριθμοὶ ὅ τε ἐκ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *ΓΔ*, οἳ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τοῦ *ΒΔ* τετράγωνον.

Καὶ φανερόν, ὅτι εὕρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ *ΒΔ* καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *ΓΔ*, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ὑπὸ *ΑΒ*, *ΒΓ* εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ *ΑΒ*, *ΒΓ* ὅμοιοι ὦσιν ἐπίπεδοι. ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηνται δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ *ΒΔ* καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *ΔΓ*, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* οὐκ ἔστι τετράγωνος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ*, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ *ΓΑ*, καὶ τετμήσθω ὁ *ΓΑ* δίχα τῷ *Δ*. φανερὸν δή, ὅτι ὁ ἐκ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] *ΓΔ* τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] *ΒΔ* τετραγώνῳ. ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ *ΔΕ*· ὁ ἄρα ἐκ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] *ΓΕ* ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] *ΒΔ* τετραγώνου. λέγω οὖν, ὅτι ὁ ἐκ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] *ΓΕ* οὐκ ἔσται τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] *ΒΕ* ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ [τοῦ] *ΒΕ*, οὐκέτι δὲ

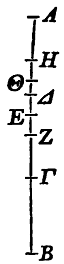
---

2. ποιῶσι V, sed corr. *ΒΔ*] supra scr. m. 1 F. τετραγώνου F, sed corr. 4. Mg. add. ▣ Bb, m. 2 PFV. πάλιν ηὕρηνται F. ηὕρηνται Vb. τετράγωνα P, corr. m. 1. 5. ὁ] (alt.) om. P. 6. τόν] τήν FV. ὑπὸ τῶν V. *ΑΒ*] *Β* ins. m. 2 P. τετράγωνον εἶναι B. 8. ηὕρηνται Vb, et corr. ex εὕρηνται m. 2 F. 9. ὁ] om. P. *ΓΔ* BFV. ἡ] om. b. 10. *ΑΒ*] *Α* P. Ante ὅπερ add. ὁ ἄρα P. ὅπερ

monstrauimus, si duo numeri plani similes inter se multiplicantes numerum aliquem efficiant, numerum inde productum quadratum esse [IX, 1]. ergo inuenti sunt duo numeri quadrati $AB \times B\Gamma$ et $\Gamma\Delta^2$, qui compositi quadratum $B\Delta$ efficiant. et manifestum est, rursus inuentos esse duos numeros quadratos $B\Delta^2$ et $\Gamma\Delta^2$ eius modi, ut eorum differentia $AB \times B\Gamma$ quadrata sit, si AB, $B\Gamma$ plani sint similes. sin non sunt similes plani, duo numeri quadrati inuenti sunt $B\Delta^2$ et $\Delta\Gamma^2$, quorum differentia $AB \times B\Gamma$ quadrata non sit; quod erat demonstrandum.

Lemma II.

Inuenire duos numeros quadratos eius modi, ut numerus ex iis compositus quadratus non sit.



Sit enim $AB \times B\Gamma$ quadratus, uti diximus [lemma I], et ΓA par sit et in Δ in duas partes aequales secetur. manifestum igitur, esse $AB \times B\Gamma + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2$ [u. lemma I]. subtrahatur unitas ΔE. itaque $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 < B\Delta^2$. dico igitur, numerum quadratum [IX, 1] $AB \times B\Gamma$ addito ΓE^2 quadratum non esse.

Nam si quadratus erit, aut aequalis est quadrato BE^2 aut minor quadrato BE^2, maior autem non est,

---

ἔδει δεῖξαι] om. BFVb, comp. P. 16. τῷ] κατὰ τῷ F. ὁ] om. P. 17. τοῦ] (alt.) τῆς P. 18. τοῦ] om. BFb, τῆς P, B m. 2. ὁμοίως μονάς P. 19. ἐκ] ἀπό b. τῶν] τοῦ P. *BΓ* τετράγωνος V. τοῦ] (alt.) om. BFb, τῆς P, B m. 2. ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ] in ras. m. 1 b. 20. τοῦ] om. BFb, τῆς P, m. 2 B. 21. ὁ] om. b. τοῦ] (alt.) om. BFb, τῆς P. 22. ἔστι P. 23. ἔσται] ἐστι BFb. ἐστίν B, sed corr. 24. τοῦ] om. Bb, τῆς P. ἐλάσσων] $\chi^{\omega\nu}$ F, ἔλασσον ὄν b; ἐλάσσον B, seq. ras. 1 litt., ἐλάσσονι m. rec. τοῦ — *BE*] om. V. τοῦ] om. BFb. οὐκ ἔστι b.

καὶ μείζων, ἵνα μη τμηθῇ ἡ μονάς. ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίων ὁ ΗΑ. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστι διπλασίων, ὧν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστι διπλασίων, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστι διπλασίων· δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε. ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ τετραγώνῳ. ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ [τοῦ] ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ. καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ ΓΕ συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. λέγω δή, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ ΒΕ εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῷ ἀπὸ ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ διπλασίων ὁ ΘΑ. καὶ συναχθήσεται πάλιν διπλασίων ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ· ὥστε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΓ ἴσον γίνεσθαι τῷ ἀπὸ ΒΖ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ ΒΖ. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΖ ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ ἴσος ἐστὶ [τῷ] ἐλάσ-

1. μείζονι (ο et ι corr.) B; γρ. μείζονι κρεῖττόν ἐστι supra scr. m. 2 V. μή] μήτε Theon (BFVb), P m. 2. Post μονάς add. Theon: μήτε ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ (τοῦ add. V) ΓΔ, ὅς ἐστιν ὁ (om. b, mg. B) ἀπὸ (τοῦ add. PVb) ΒΔ (e corr. m. 2 V, ΔΒ PBb), ἴσος ἢ τῷ ἐκ (ὑπό BV) τῶν (om. PB) ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ (τοῦ add. PV) ΓΕ (BFVb, P m. 2). εἰ] corr. ex ἤ m. 2 P. 2. τῆς ΓΕ P. 3. τῆς ΒΕ P. τῆς ΔΕ μονάδος] om. V. διπλάσιος P. 4. ΗΑ

ne unitas diuidatur.[1]) prius, si fieri potest, sit $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$, et sit $H\Delta = 2\,\Delta E$. iam quoniam $\Delta\Gamma = 2\,\Gamma\Delta$, $\Delta H = 2\,\Delta E$, erit etiam $H\Gamma = 2\ E\Gamma$. itaque $H\Gamma$ in E in duas partes aequales diuisus est. ergo $HB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$ [II, 6]. supposuimus autem, esse etiam $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BE^2$. quare $HB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$. et subtracto, quod commune est, ΓE^2 concludimus, esse $AB = HB$; quod absurdum est. ergo $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ quadrato BE^2 aequale non est. iam dico, ne minorem quidem esse quadrato BE^2. nam si fieri potest, sit $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BZ^2$, et $\Theta\Delta = 2\,\Delta Z$. et rursus concludemus, esse $\Theta\Gamma = 2\,\Gamma Z$; quare etiam $\Gamma\Theta$ in Z in duas partes aequales diuisus est, et ea de causa $\Theta B \times B\Gamma + Z\Gamma^2 = BZ^2$ [II, 6]. supposuimus autem, esse etiam

1) Nam $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 < B\Delta^2$. sit latus x. ergo habebimus $BE^2 < x^2 < (BE + 1)^2$, h. e. $BE < x < BE + 1$, ita ut x fractio sit, quod fieri non potest.

τῆς ΔE μονάδος V. 5. ἐστίν P. ὧν ὁ] ὁ δέ P. διπλάσιος BFb. 6. καὶ ὁ BFb. ΓH V. διπλάσιος BFb. 7. Ante τῷ ins. ἀπό m. 2 F. HB] B e corr. F. 8. τοῦ ΓE V. τοῦ BE V. 10. τοῦ] om. BFb. 11. HB] H in ras. V. $B\Gamma$] BH b. τοῦ ΓE V. 12. ἐκ] ὑπό V. τῶν] τοῦ P. AB] A in ras. V. τοῦ ΓE V. 13. τοῦ ΓE V. ὁ] ἡ P. ἴσος τῷ] ἴση τῇ P. 15. τοῦ ΓE] ΓE BFb, τῆς ΓE P. τοῦ BE V. ὁ ὑπὸ τῶν HB, $B\Gamma$ ἴσος τῷ ἐκ τῶν AB, $B\Gamma$ mg. Fb. δή] om. b. 16. ἔλασσον F m. 1, V (sed corr.); ἐλάσσονι F m. 2, b, B in ras. τοῦ BE V. 17. τοῦ BZ V. ἴσος] om. Fb, m. 2 BV. κείσθω ὁ V. καί] om. V. 19. τό] τόν F. 20. τόν] τήν F. ἐκ] ὑπό b. τοῦ $Z\Gamma$ V. γίγνεσθαι F, γενέσθαι Vb. 21. BZ] ZB B et V (supra Z ras. est). 22. τοῦ ΓE V, BE b. BZ] in ras. V, ΓE b. ὥστε — 23. τῷ] συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ Theon (BFVb). 24. μετά] in ras. φ. Post ΓE add. Theon: τῷ ἐκ τῶν ΘB (EB b) $B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓZ (BFVb). 25. ἐστίν P. τῷ] om. P. ἐλάττονι V.

σονι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ [αὐτῷ] τῷ ἀπὸ ΒΕ. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΕ τετράγωνός ἐστιν [δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικνύειν, ἀρκείσθωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπὶ πλέον αὐτὴν μηκύνωμεν]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ΄.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔΕ, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ΓΕ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ.

Ἐπεὶ [οὖν] ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν,

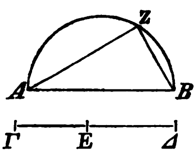
1. τοῦ ΒΕ V. αὐτῷ] om. P. 2. τῆς ΒΕ P; ΓΕ b. Dein add. Theon: οὐδὲ (om. b) μείζονι αὐτοῦ (BFVb). 3. ἐστι PBV, comp. Fb. δυνατοῦ] τ in ras. plurium litt. B. 4. τρόπους] bis b. τὸ εἰρημένον Theon (BFVb). ἀριθμούς] om. Theon (BFVb). ἐπιδεικνύειν] ἐπι- supra scr. F, in ras. B; ἐπιδεικνύναι V. 5. ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος Theon (BFVb). 7. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. Theon (BFVb). 9. εὑρίσκειν B. 11. τῷ] corr. ex τοῦ m. 2 B. 13. τόν] τήν V.

$AB \times B\Gamma + \Gamma E^2 = BZ^2$. quare etiam $\Theta B \times B\Gamma + \Gamma Z^2 = AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$; quod absurdum est. itaque $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ spatio minori, quam est quadratum BE^2, aequale non est. demonstrauimus autem, ne ipsi quidem BE^2 id aequale esse. ergo $AB \times B\Gamma + \Gamma E^2$ quadratus non est[1]); quod erat demonstrandum.

XXIX.

Duas rationales inuenire potentia tantum commensurabiles eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis.

ponantur enim recta rationalis AB et duo numeri quadrati $\Gamma\Delta$, ΔE eius modi, ut eorum differentia ΓE quadrata non sit [lemma I]. et in AB semicirculus describatur AZB, et fiat $\Delta\Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$ [prop. VI coroll.], et ducatur ZB.



quoniam est $BA^2 : AZ^2 = \Delta\Gamma : \Gamma E$, BA^2 ad AZ^2 rationem habet, quam numerus $\Delta\Gamma$ ad numerum ΓE. itaque BA^2, AZ^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum AB^2 rationale est [def. 4]. itaque etiam AZ^2 rationale est [id.]. quare etiam AZ rationalis est. et quoniam $\Delta\Gamma : \Gamma E$ rationem non habet, quam numerus

1) δυνατοῦ lin. 3 — μηκύνωμεν lin. 6 Euclides non scripsit; uncis ea inclusit August II p. 359. nescio, an idem recte de ambobus lemmatis totis dubitationem iniecerit. sed satis antiquo tempore interpolata sunt.

15. ὡς] supra scr. m. 1 V. ὁ] ras. F. ΔΓ] in ras. m. 1 P. 17. τετράγωνον] om. V. 18. οὖν] om. P. 19. ΔΓ] ΓΔ V. 21. ἐστίν P. 23. καὶ ἡ] ἡ P. 24. ΔΓ] ΓΔ F. οὐκ] supra scr. m. 1 P. 25. ὃν ὁ V.

οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΖ μήκει· αἱ ΒΑ, ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί [ἐστιν] ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ.

Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ'.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΓΔ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμι-

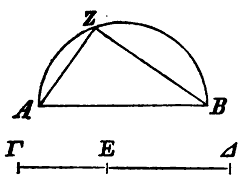
1. ΑΒ F. ἄρα] supra scr. m. 1 P. ΑΖ] Z e corr. V. 3. ΒΑ P. 4. ΑΒ, ΑΖ BVb; ΑΖ, ΑΒ F. εἰσιν B. 5. ἐστιν] om. P. τόν] mut. in τό m. 2 F. 10. καὶ τό — 11. ἀριθμόν] mg. m. 1 F (partem abstulit reparatio pergam.). 12. σύμ̈ετρος P. ἐστιν P. 14. ἑαυτῇ μήκει V. 15. ηὕρηνται Fb. 17. μείζονα P. ΖΒ Bb. συμμέτρῳ F. 18. ὅπερ

quadratus ad numerum quadratum [lemma I], ne BA^2 quidem ad AZ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare AB, AZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque BA, AZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. et quoniam $\Delta\Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$, conuertendo erit [V, 19 coroll.] $\Gamma\Delta : \Delta E = AB^2 : BZ^2$ [cfr. III, 31. I, 47]. sed $\Gamma\Delta : \Delta E$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare etiam $AB^2 : BZ^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque AB, BZ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. et $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$ [III, 31. I, 47]. itaque AB^2 excedit AZ^2 quadrato rectae BZ sibi commensurabilis.

Ergo inuentae sunt duae rationales potentia tantum commensurabiles BA, AZ eius modi, ut maior AB quadrata minorem AZ excedat quadrato rectae BZ sibi longitudine commensurabilis; quod erat demonstrandum.

XXX.

Inuenire duas rationales potentia tantum commensurabiles eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis.



Ponatur rationalis AB et duo numeri quadrati ΓE, $E\Delta$ eius modi, ut numerus ex iis compositus $\Gamma\Delta$ quadratus non

---

ἔδει δεῖξαι] :~ P, om. BFb. Seq. lemma, u. app. 23. ἀριθμοί] om. FV. 24. τόν] (alt.) τῶν b.

κύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ προς τον ΓΕ, οὕτως τὸ ἄπο τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ ΒΑ, ΑΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τον ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς το ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ προς τον ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα το ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Αἱ ΑΒ, ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα΄.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας, ὥστε την μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, ὥστε τὴν Α μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος τῆς Β μεῖζον δύνασθαι τῷ ἄπο συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

---

1. Post καί del. ἐπεζεύχθω m. 1 P. ΓΔ P. τόν] om. Fb. 2. ΒΑ] e corr. m. 2 V. ΒΖ b. 3. ΒΖ P. 4. δέ b, corr. m. 1. ὡς ἐν τῷ Theon (BFVb). ΒΑ] e corr. m. 2 V. 5. εἰσιν B. 6. τόν] om. BF. 7. ΓΔ] ΔΓ b. 9. ΓΔ]

sit [lemma II], et in AB semicirculus AZB describatur. et fiat $\varDelta\Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$ [prop. VI coroll.], et ducatur ZB.

iam similiter ac in praecedenti [p. 86, 18 sq.] demonstrabimus, BA et AZ rationales esse potentia tantum commensurabiles. et quoniam est $\varDelta\Gamma : \Gamma E = BA^2 : AZ^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] erit $\Gamma\varDelta : \varDelta E = BA^2 : BZ^2$ [III, 31. I, 47]. uerum $\Gamma\varDelta : \varDelta E$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ne AB^2 quidem ad BZ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque AB, BZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et $AB^2 = AZ^2 + ZB^2$ [III, 31. I, 47].

Ergo AB, AZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AB quadrata excedit AZ quadrato rectae ZB sibi longitudine incommensurabilis; quod erat demonstrandum.

XXXI.

Inuenire duas medias potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis.

Ponantur duae rectae rationales potentia tantum commensurabiles A, B eius modi, ut maior A quadrata excedat minorem B quadrato rectae sibi longitu-

---

in ras. V. οὐκ] postea ins. F. 13. τῇ] corr. ex ἡ V. δυνάμει b, -μει supra scr. F. 14. μείζων b. BZ Fb. ἀσυμμέτρῳ BFb. 16. AZ] BZ Theon (BFVb). εἰσιν P. 17. τῷ] τῇ P. 18. BZ F. ἀσυμμέτρῳ F. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, ὅπερ b. 22. ἀπό] -ό eras. V. ἀσυμμέτρου P. 26. ἀσυμμέτρου P, et F (ἀ del.). μήκει] om. FVb, m. 2 B.

καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Γ. τῷ δὲ ἀπο τῆς Β ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ· ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ, οὕτως ἡ Γ πρὸς την Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. καί ἐστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

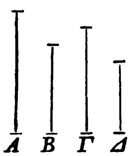
Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ, Δ ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Β μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

---

1. τῷ] corr. ex τῶν m. 1 P. 2. τῆς] corr. ex τοῦ m. 2 F. 3. δέ] δ' F. 4. Δ] corr. ex Α m. rec. b, Α φ (non F). 5. ἄρα ἐστι̅ P. Ante ἐπεί ras. 3 litt. P. 7. ὑπό] ὑ- in ras. V. 8. ἐστὶ τό b. 14. ἐστιν PB. 15. οὕτως ἡ Γ FV. 16. τῆς] τῆι F. τῷ] corr. ex τό F. ἀσυμμέτρου P, supra σ ras. 1 litt. B, συμμέτρῳ φ. 17. δυνήσεται Theon (BFVb). 18. ἀσυμμέτρου P, supra σ ras. 1 litt. B, συμμέτρῳ F. 19. ηὕρηνται Vb, F m. 2. ἄρα] supra scr. m. 2 B. 21. ἀσυμμέτρου P, supra σ ras. 1 litt. B. 22. δέ FV. τῷ] τό FV.

dine commensurabilis [prop. XXIX]. et sit $\Gamma^2 = A \times B$. uerum $A \times B$ medium est [prop. XXI]. itaque etiam Γ^2 medium est; quare Γ est media [id.]. sit autem $\Gamma \times \Delta = B^2$. uerum B^2 rationale est. itaque etiam $\Gamma \times \Delta$ rationale est. et quoniam est $A : B = A \times B : B^2$ [cfr. prop. XXI lemma], et $\Gamma^2 = A \times B$, $B^2 = \Gamma \times \Delta$, erit $A : B = \Gamma^2 : \Gamma \times \Delta$. est autem $\Gamma^2 : \Gamma \times \Delta = \Gamma : \Delta$ [prop. XXI lemma]. quare etiam $A : B = \Gamma : \Delta$. uerum A, B potentia tantum commensurabiles sunt. itaque etiam Γ, Δ potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. et Γ media est. itaque etiam Δ media est [prop. XXIII]. et quoniam est $A : B = \Gamma : \Delta$, et A^2 excedit B^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam Γ^2 excedit Δ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV].



Ergo inuentae sunt duae mediae potentia tantum commensurabiles Γ, Δ spatium rationale comprehendentes, et Γ^2 excedit Δ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis.

Similiter demonstrabimus, Γ^2 excedere Δ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, si A^2 excedat B^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXX].

συμμέτρον P, et F, corr. m. 1. 23. ἡ Α] om. P. δυνήσηται B, δυνήσεται L, δύνηται ἡ Α P. συμμέτρον P. 24. Seq. lemma, u. app.

λβ΄.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

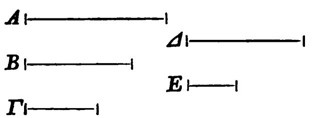
Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, Γ, ὥστε τὴν Α τῆς Γ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ. μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστίν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α, Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει [μόνον]. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, Ε, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Β, Γ

---

4. *ἐλάττονος* FV. *μείζονα* L, et B, sed corr. *συμμέτρου*] *ἀ-* add. m. rec. b. 5. *αυτη* L. 6. *ῥηταὶ αἱ Α, Β, Γ* V. 7. *αἱ Α, Β, Γ*] om. V, *αἱ Α, Β* b. *μείζονα* L, et B, sed corr. 8. *συμμέτρου*] *ἀ-* add. m. rec. b. *τῷ*] *τό* L. 10. *ἐστί* V, comp. Fb. 11. *τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε*] m. 1 b, supra scr.

XXXII.

Inuenire duas medias potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi commensurabilis.



Ponantur tres rectae rationales potentia tantum commensurabiles A, B, Γ eius modi, ut A^2 excedat Γ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XXIX], et sit $\Delta^2 = A \times B$. itaque Δ^2 medium est; quare etiam Δ media est [prop. XXI]. sit autem $\Delta \times E = B \times \Gamma$. et quoniam est $A \times B : B \times \Gamma = A : \Gamma$ [prop. XXI lemma] 1), et $\Delta^2 = A \times B$, $\Delta \times E = B \times \Gamma$, erit $A : \Gamma = \Delta^2 : \Delta \times E$. uerum $\Delta^2 : \Delta \times E = \Delta : E$ [prop. XXI lemma]. quare etiam $A : \Gamma = \Delta : E$. sed A, Γ potentia tantum commensurabiles sunt. quare etiam Δ, E potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. Δ autem media est. itaque etiam E media est [prop. XXIII]. et quoniam est $A : \Gamma = \Delta : E$, et A^2 excedit Γ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam Δ^2 excedit E^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. iam dico, $\Delta \times E$ etiam medium esse. nam

1) Nam $A : B = A \times B : B^2$ (cfr. supra p. 92,5), $B : \Gamma = B^2 : B \times \Gamma$.

m. rec. τῷ ἀπὸ τοῦ E. 13. ἐστίν L. 14. ἴσον ἐστί V. τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E] m. 1 b, supra scr. m. rec. τῷ ἀπὸ τοῦ E. 16. τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E] m. 1 b, supra scr. τὸ ἀπὸ τοῦ E. ὡς δέ] ἀλλ' ὡς V. 19. μόνον] om. P. 22. τῷ] corr. ex τό m. 2 P. συμμέτρου] ἀ- add. m. rec. b, item lin. 24. 24. ἐστίν L. 25. ἐστίν L. τό] τῷ V, et b, sed corr. 26. τῷ ὑπὸ τῶν Δ, E] m. 1 b, supra scr. m. rec. τῷ ἀπὸ τοῦ E. τό] τῷ P.

[αἱ γὰρ Β, Γ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι], μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, Ε μέσον περιέχουσαι, ὥστε την μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Ὁμοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Λῆμμα.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν Α, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

Καὶ πρῶτον, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς την ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

---

1. *αἱ γάρ — σύμμετροι*] om. LFVb, mg. m. 2 B. *εἰσιν* P. 2. *καί*] om. LB. *τὸ ὑπὸ τῶν Δ, Ε*] m. 1 b, supra scr. m. rec. *τὸ ἀπὸ τοῦ Ε*. 3. *ηὕρηνται* LFVb. 4. *τὴν μέν* V. 5. *συμμέτρου*] *ἀ-* add. m. rec. b. 6. *τῷ*] *τό* V. *συμμέτρου* L, et BF, sed corr. 7. *δύναται* Pb. *συμμέτρου* L, et BF, sed corr. 8. Post *ἑαυτῇ* add. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* V. Seq. lemma, u. app. 9. *λῆμμα*] om. L. 10. *ἔχων* P. 11. *Α*] *ὑπὸ ΒΑΓ* Theon (LBFVb); *γρ. τὴν ὑπὸ ΒΑΓ* mg. P. 12. *ΓΒΔ*] supra add. *Β* PV. *ἐστίν* L.

quoniam $B \times \Gamma = \Delta \times E$, et $B \times \Gamma$ medium est [prop. XXI], etiam $\Delta \times E$ medium est.

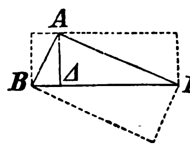
Ergo inuentae sunt duae mediae potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes Δ, E eius modi, ut maior quadrata minorem excedat quadrato rectae sibi commensurabilis.

Similiter rursus demonstrabimus, Δ^2 excedere E^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, si A^2 excedat Γ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXX].

Lemma.

Sit $AB\Gamma$ triangulus rectangulus rectum habens angulum A, et ducatur perpendicularis $A\Delta$. dico, esse $\Gamma B \times B\Delta = BA^2$, $B\Gamma \times \Gamma\Delta = \Gamma A^2$, $B\Delta \times \Delta\Gamma = A\Delta^2$, $B\Gamma \times A\Delta = BA \times A\Gamma$.

et primum, esse $\Gamma B \times B\Delta = BA^2$.



nam quoniam in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducta est $A\Delta$, trianguli $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ et toti $AB\Gamma$ et inter se similes sunt [VI, 8]. et quoniam $AB\Gamma \sim AB\Delta$, erit $\Gamma B : BA = BA : B\Delta$ [VI, 4]. quare [VI, 17] $\Gamma B \times B\Delta = AB^2$.

---

13. $B\Gamma\Delta$] supra add. Γ PF; $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ e corr. V. ἴσον] supra scr. m. 1 P. τῆς] om. Bb. $A\Gamma$ φ. $B\Delta\Gamma$, supra add. Δ m. rec., P. 14. $B\Gamma$] e corr. V. 15. ἐστί] om. LBFVb. τῶν] om. P. 16. τῶν] om. P. $\Gamma B\Delta$] FVb, B m. 2; ΓB LB; $\Gamma\Delta B$ P; ΓB, $B\Delta$ FV m. 2, P m. rec. ἐστί] om. LBFVb. 19. τά] corr. ex τῆι m. 2 B. $AB\Delta$] Δ in ras. m. 1 P. 20. $\Delta A\Gamma$? L. ἐστίν LPB. 22. $AB\Delta$] B in ras. V. 23. BA] AB φ. BA] mut. in AB V. 24. ΓB, $B\Delta$ φ, m. rec. P, m. 2 V.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Καὶ ἐπεί, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς την ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ [ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων]. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ' ὁποτέρας τῶν ΒΔ, ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς

---

1. *ΒΓ, ΓΔ* m. rec. P, m. 2 V. *ἐστί*] om. Fb. 3. *τριγώνῳ*] supra scr. comp. m. 2 B. 6. *ΑΔ*] *ΔΑ* B. 10. *ἐστι*] postea ins. F. 11. *ΑΒΓ τρίγωνον* F. *ΑΒΔ*] *ΑΓΔ* BFb, et supra scr. *Β* m. 1 V. 12. *ΓΑ*] *Α* in ras. V. *ΑΔ*]

eadem de causa etiam $B\Gamma \times \Gamma\Delta = A\Gamma^2$.

et quoniam, si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad basim perpendicularis ducitur, recta ducta media est proportionalis partium basis [VI, 8 coroll.], erit $B\Delta : \Delta A = A\Delta : \Delta\Gamma$. quare [VI, 17] $B\Delta \times \Delta\Gamma = \Delta A^2$.

dico, esse etiam $B\Gamma \times A\Delta = BA \times A\Gamma$. nam quoniam, ut diximus, trianguli $AB\Gamma$, $AB\Delta$ similes sunt, erit [VI, 4] $B\Gamma : \Gamma A = BA : A\Delta$. itaque[1]) $B\Gamma \times A\Delta = BA \times A\Gamma$ [VI, 16]; quod erat demonstrandum.

XXXIII.

Inuenire duas rectas potentia incommensurabiles, quae summam quadratorum suorum rationalem efficiant, rectangulum autem medium.

Ponantur duae rationales potentia tantum commensurabiles AB, $B\Gamma$ eius modi, ut maior AB quadrata minorem $B\Gamma$ excedat quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXX], et $B\Gamma$ in Δ in duas partes aequales secetur, et quadrato $B\Delta^2$ uel $\Delta\Gamma^2$ aequale parallelogrammum rectae AB adplicetur figura quadrata deficiens [VI, 28] et sit $AE \times EB$, et in AB

---

1) Uerba quae praecedunt damnaui, quia non magis est, cur haec propositio omnibus uerbis citetur, quam VI, 17, qua bis in hoc lemmate tacite usus est.

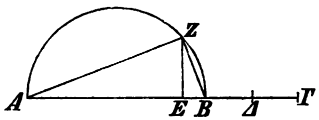
ΔA φ. 13. ὦσι V. τό] corr. ex τῷ V. 15. τῷ] corr. ex τό m. 1 F, τό φ. τῶν] om. Bb. Seq. demonstr. alt., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. Pb, om. BFV. Seq. lemmata, u. app. 19. δέ F. 21. ἐλάττονος b, comp. F. 22. μείζονα P, corr. m. rec. 23. τῷ] corr. ex τό m. 1 V. 25. παραλληλόγραμον P. 26. AE, EB V, P m. rec.

ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ *ΑΖΒ*, καὶ ἤχθω τῇ *ΑΒ* πρὸς ὀρθὰς ἡ *ΕΖ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΑΖ*, *ΖΒ*.

Καὶ ἐπεὶ [δύο] εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ *ΑΒ*, *ΒΓ*, καὶ ἡ *ΑΒ* τῆς *ΒΓ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς *ΒΓ*, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν *ΑΒ* παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕΒ*, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΕ* τῇ *ΕΒ*. καί ἐστιν ὡς ἡ *ΑΕ* πρὸς *ΕΒ*, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν *ΒΑ*, *ΑΕ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΕ*, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν *ΒΑ*, *ΑΕ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΖ*, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΕ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΒΖ*· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΖ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΖΒ*· αἱ *ΑΖ*, *ΖΒ* ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ *ΑΒ* ῥητή ἐστιν, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ*· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΖ*, *ΖΒ* ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΕΖ*, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ* καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΒΔ* ἴσον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΕ* τῇ *ΒΔ*· διπλῆ ἄρα ἡ *ΒΓ* τῆς *ΖΕ*· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* σύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΕΖ*. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ*· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΕΖ*. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΕΖ* τῷ ὑπὸ τῶν *ΑΖ*, *ΖΒ*· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΖ*, *ΖΒ*. ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

---

1. *ΑΒ*] *ΑΕΒ* b. *ΑΒΖ* P. 3. δύο] om. P, post εὐθεῖαι ins. m. 2. αἱ] m. rec. P. 4. συμμέτρου FV, corr. m. 2. 5. τὸ (τῷ V) δὲ τέταρτον BFVb, corr. m. 2 BV (τετάρτῳ m. rec. b). τῆς] τῆς ἐλάσσονος τῆς Theon (BFVb). τουτέστιν P. τῷ] τό Fb, corr. ex τό m. 2 B. 6. ἴσον] om. Fb, m. 2 B. 7. παραλληλόγραμμον] om. Fb, m. 2 B. 8. *ΑΕ*, *ΕΒ* V, m. rec. P. 9. πρὸς τὴν *ΕΒ* V. 10. τῶν] (alt.) om. P.



describatur semicirculus AZB, et ducatur ad AB perpendicularis EZ, et ducantur AZ, ZB.

et quoniam AB, $B\Gamma$ inaequales sunt rectae, et AB^2 excedit $B\Gamma^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis, et quartae parti quadrati $B\Gamma^2$, hoc est $(\frac{1}{2}B\Gamma)^2$, aequale parallelogrammum rectae AB adplicatum est figura quadrata deficiens et efficit $AE \times EB$, AE et EB incommensurabiles erunt [prop. XVIII]. est autem $AE : EB = BA \times AE : AB \times BE$ [u. p. 95 not.]; et $BA \times AE = AZ^2$, $AB \times BE = BZ^2$ [u. lemma]. itaque AZ^2, ZB^2 incommensurabilia sunt [prop. XI]. quare AZ, ZB potentia incommensurabiles sunt. et quoniam AB rationalis est, etiam AB^2 rationale est. itaque summa quadratorum $AZ^2 + ZB^2$ rationale est [I, 47]. et quoniam rursus $AE \times EB = EZ^2$ [u. lemma], et supposuimus, esse etiam $AE \times EB = B\Delta^2$, erit $ZE = B\Delta$. itaque $B\Gamma = 2\,ZE$. quare etiam $AB \times B\Gamma$ et $AB \times EZ$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum $AB \times B\Gamma$ medium est [prop. XXI]. itaque etiam $AB \times EZ$ medium est [prop. XXIII coroll.]. uerum $AB \times EZ = AZ \times ZB$ [u. lemma]. itaque etiam $AZ \times ZB$ medium est. demonstrauimus autem, etiam summam quadratorum earum rationalem esse.

---

12. ZB P. 13. ἐστίν P. ZB] (prius) BZ FVb. 14. ἐστι BV, comp. Fb. 15. ῥητὸν ἄρα ἐστί] mg. m. 1 F. 16. ἐστι BV, comp. Fb. 19. $B\Delta$] (alt.) in ras. m. 1 P. 20. τῆς] corr. ex τῇ m. 1 V. 21. σύμμετρον] διπλάσιον Theon (BFVb); mg. m. 1: διὰ τὸ τὴν $B\Gamma$ διπλασίονα εἶναι τῆς $B\Delta$, τὴν δὲ $B\Delta$ ἴσην εἶναι τῇ EZ pro scholio P. τῷ] τοῦ Theon (BFV). 22. $AB\Gamma$ BFb, et V, corr. m. 2. 23. δέ] om. b.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΖ, ΖΒ ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ΄.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΒ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖΒ· ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει. καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΒ.

Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ

---

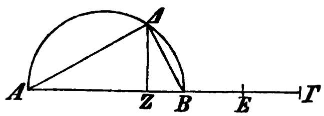
1. ηὕρηνται FV. 3. ῥητῶν b, corr. m. 1. δ' BVb. ἀπ' F. 4. δεῖξαι] εὑρεῖν b, mg. m. 1: γρ. δεῖξαι; in F mg. m. 2: γρ. εὑρεῖν. 7. τό] corr. ex τόν P. 8. δέ F. 11. συμμέτρου F, corr. m. 1. 15. ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ] om. Fb, m. 2 B. τό] ποιοῦν τό V. 16. τῶν ΑΖΒ] non liquet F. ΑΖ, ΖΒ V. σύμμετρος φ, et B, corr. m. 2. ἐστίν] om. P, ἔσται φ. ΖΒ] ΒΖ P. 18. ΖΔ] ΔΖ e corr. m. 2 V. ΔΒ]

Ergo inuentae sunt duae rectae potentia incommensurabiles AZ, ZB, quae summam quadratorum suorum rationalem efficiant, rectangulum autem medium; quod erat demonstrandum.

XXXIV.

Inuenire duas rectas potentia incommensurabiles, quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, rectangulum autem rationale.

Ponantur duae mediae potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes AB, $B\Gamma$



eius modi, ut AB^2 excedat $B\Gamma^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXXI], et in AB describatur $A\Delta B$ semicirculus, et $B\Gamma$ in E in duas partes aequales secetur, et rectae AB quadrato BE^2 aequale parallelogrammum adplicetur $AZ \times ZB$ figura quadrata deficiens [VI, 28]. itaque AZ, ZB longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVIII]. et a Z ad rectam AB perpendicularis ducatur $Z\Delta$, et ducantur $A\Delta$, ΔB.

quoniam AZ, ZB incommensurabiles sunt, etiam $BA \times AZ$ et $AB \times BZ$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum $BA \times AZ = A\Delta^2$, $AB \times BZ = \Delta B^2$ [prop. XXXII lemma]. ergo $A\Delta^2$, ΔB^2 incommensurabilia sunt.

et quoniam AB^2 medium est, etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medium est [III, 31. I, 47].

corr. ex $\Delta\Gamma$ V. 19. καὶ ἐπεί V, ἐπεὶ οὖν m. rec. P. 23. ἐστίν P. τῆς] (alt.) om. P. ΓB b, corr. m. 1. 25. ΔB] in ras. V.

διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν ἐστιν.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΔ, ΔΒ ποιοῦσαι τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνῳ.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω τοῖς ἐπάνω ὁμοίως.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ

---

1. διπλῆ] διπλασίων Theon (BFVb). 2. τοῦ] e corr. F. Post ΖΔ add. ὥστε καὶ σύμμετρον V, B m. 2. 3. Post ΒΓ add. Theon: ὑπόκειται γάρ (οὕτως add. V) (BFVb). 4. ΖΔ] corr. in ΒΖ m. 2 F, corr. ex ΒΖ m. rec. b. τό] τῷ BF, τῷ δὲ τῷ b. τῷ] τό BFb. τῶν] om. Pb. 6. ηὕρηνται Vb. σύμμετροι P, corr. m. 1. 7. μέν] om. P. 8. τετράγωνον F et V, sed corr. δέ F. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 10. λϛ' F, corr. m. 1. 13. τετράγωνον b, et F,

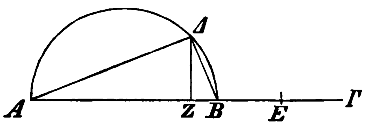
et quoniam $B\Gamma = 2\,\Delta Z$, erit etiam $AB \times B\Gamma = 2\,AB \times Z\Delta$. uerum $AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque etiam $AB \times Z\Delta$ rationale est [prop. VI; def. 4]. uerum $AB \times Z\Delta = A\Delta \times \Delta B$ [prop. XXXII lemma]. quare etiam $A\Delta \times \Delta B$ rationale est.

Ergo inuentae sunt duae rectae potentia incommensurabiles $A\Delta$, ΔB, quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, rectangulum autem rationale; quod erat demonstrandum.

XXXV.

Inuenire duas rectas potentia incommensurabiles, quae et summam quadratorum suorum mediam efficiant et rectangulum medium et simul summae quadratorum incommensurabile.

Ponantur duae mediae potentia tantum commensurabiles AB, $B\Gamma$ medium comprehendentes eius modi, ut AB^2 excedat $B\Gamma^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XXXII], et in AB semicirculus describatur $A\Delta B$, et reliqua fiant, sicut supra.



et quoniam AZ, ZB longitudine incommensurabiles sunt, etiam $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sunt [prop. XI]. et quoniam AB^2 medium est, etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medium est [prop. XXIII coroll.]. et

sed corr. 17. $B\Gamma$] (alt.) Γ b. 18. *συμμέτρου* b et F, corr. m. 1. 19. $A\Delta B$] corr. ex $A\Gamma B$ m. 1 b, $AB\Delta$ φ. 20. *γεγονέτω*] supra scr. F. *ἐπάνω εἰρημένοις* V. *ὁμοίως*] om. Fb, m. 2 BV. 21. *ἐπεί*] om. B, corr. m. 2. *ἐστιν*] supra m. 1 P. ZB] BZ B. 22. *ἐστι*] *ἄρα ἐστί* F, *ἐστιν* B.

EUCLIDIS

OPERA OMNIA.

EDIDERUNT

I. L. HEIBERG ET H. MENGE.

LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCLXXXVI.

τῶν ΑΖ, ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΒΕ, ΔΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΔΖ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπο τῶν ΑΒ, ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ. καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΖΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ το συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς΄.

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

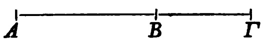
1. ΑΖ] ΔΖ b. τῷ] τῷ ἀπό P, corr. m. rec. 3. ΔΖ BFb. 4. τοῦ] τό F, corr. ex τό m. rec. P, mut. in τῷ m. 1 b. τὸ ὑπό — 5. ἄρα καί] mg. m. 2 B. 8. ΒΓ] ΓΒ F. ΓΒ] mut. in ΒΓ V. 9. ΑΒ] ΒΑ e corr. m. 2 V. τό] ins. m. 2 F. 10. τῷ] corr. ex τό F. σύμμετρον F, corr. m. 1. ἄρα ἐστίν b, ἄρα supra add. F. 11. ἐστίν P. τῶν] ins. m. 2 F. 12. τῷ] corr. ex τά m. 1 F. 13. ΔΖ B. τουτέστιν P. 14.

quoniam $AZ \times ZB = BE^2 = \varDelta Z^2$, erit $BE = \varDelta Z$. itaque $B\Gamma = 2\, Z\varDelta$. quare etiam $AB \times B\Gamma = 2\, AB \times Z\varDelta$. uerum $AB \times B\Gamma$ medium est. itaque etiam $AB \times Z\varDelta$ medium est. et $AB \times Z\varDelta = A\varDelta \times \varDelta B$ [prop. XXXII lemma]. itaque etiam $A\varDelta \times \varDelta B$ medium est. et quoniam AB, $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et ΓB, BE commensurabiles, etiam AB, BE longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare etiam AB^2 et $AB \times BE$ incommensurabilia sunt [prop. XXI lemma; prop. XI]. uerum $A\varDelta^2 + \varDelta B^2 = AB^2$ [I, 47] et $AB \times Z\varDelta = AB \times BE = A\varDelta \times \varDelta B$. itaque $A\varDelta^2 + \varDelta B^2$ et $A\varDelta \times \varDelta B$ incommensurabilia sunt.

Ergo inuentae sunt duae rectae $A\varDelta$, $\varDelta B$ potentia incommensurabiles, quae et summam quadratorum suorum mediam efficiant et rectangulum medium et simul summae quadratorum incommensurabile; quod erat demonstrandum.

XXXVI.

Si duae rectae rationales potentia tantum commensurabiles componuntur, tota irrationalis est, uocetur autem ex duobus nominibus.



Componantur enim duae rectae rationales potentia tan-

τῶν] (prius) mut. in τῆς m. 1 b. 16. αἱ $A\varDelta$, $\varDelta B$] om. V. 18. αὐτῶν τετραγώνων V. μέσον καί] mg. V. καὶ τό] seq. ras. 1 litt. V, τὸ δέ Fb, τὸ δ' B. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. Seq. ἀρχὴ τῶν κατὰ σύνθεσιν ἑξάδων BFb, mg. V; et in mg. ἐντεῦθεν ἄρχεται παραδιδόναι κατὰ σύνθεσιν ἓξ (ἑξῆς V) ἀλόγους BFVb. 21. λϛ'] mut. in λζ' F. 23. ἐστι BV, comp. Fb. καλεῖται P. 26. ὅλη] om. FVb, m. 2 B. AB b, corr. m. 1.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως το ὑπὸ τῶν ΑΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· αἱ γὰρ ΑΒ, ΒΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ συνθέντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω, ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

---

1. *σύμμετρος* P, corr. m. 1. 3. *ὑπό*] *ἀ* in ras. in extr. lin. F. *τῶν*] *τῆς* F. *ΑΒΓ*] *ΑΒ* F; *ΑΒ, ΒΓ* e corr. V, m. rec. P. *ἀπὸ τῆς ΒΓ*] seq. *α* eras. b, *ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ* F. 4. *ὑπὸ τῶν*] *ἀπὸ τῆς* F. *ΒΓ*] om. F. 5. *ἀπὸ τῆς*] *ὑπὸ τῶν ΑΒ* F. 7. *ΒΓ*] (prius) *ΑΒ* F, sed corr.? *αἱ* — 8. *σύμμετροι*] om. Theon (BFVb). 8. *ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τό*] *τὸ ἄρα* V, *ὥστε καὶ τό* BFb. 9. *τοῖς*] *ἀσύμμετρόν ἐστι τοῖς* F. *ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστι* BVb. 10. *συντεθέντι* P et V, sed corr.; *συντεθέν* F, corr. m. 1 et 2. *τῶν*] (alt.) corr. ex *τοῦ* m. 2 F. 11. *ΑΒ*] corr. ex *ΑΓ* V. *τουτέστιν* P. 12. *ἐστιν* P. 13. *ἄλογος* F, corr. m. 2. 14. *ἐστί*] om. BFVb. 15. *ἐστι* PBV, comp.

tum commensurabiles AB, $B\Gamma$. dico, totam $A\Gamma$ irrationalem esse.

nam quoniam AB, $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt (nam potentia tantum sunt commensurabiles), et $AB : B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$ [prop. XXI lemma], etiam $AB \times B\Gamma$ et $B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum $AB \times B\Gamma$ et $2\,AB \times B\Gamma$ commensurabilia sunt [prop. VI], et $AB^2 + B\Gamma^2$, $B\Gamma^2$ commensurabilia sunt (nam AB, $B\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles) [prop. XV]. itaque $2\,AB \times B\Gamma$ et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. et componendo

$2\,AB \times B\Gamma + AB^2 + B\Gamma^2$, hoc est $A\Gamma^2$ [II, 4],

et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. uerum $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale est. itaque $A\Gamma^2$ irrationale est [def. 4]. quare etiam $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4], uocetur autem ex duobus nominibus; quod erat demonstrandum.

XXXVII.

Si duae rectae mediae potentia tantum commensurabiles componuntur spatium rationale comprehendentes, tota irrationalis est, uocetur autem ex duabus mediis prima.

Componantur enim duae mediae potentia tantum commensurabiles AB, $B\Gamma$ spatium rationale comprehendentes [prop. XXVII]. dico, totam $A\Gamma$ irrationalem esse.

Fb. Ante ὅπερ schol. est, u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 17. λη' F. 19. συντεθῶσιν BF. 20. ἐστι PBV, comp. Fb. 21. συγκαλείσθωσαν b. 22. καὶ λέγω F. ὅλη] post ras. 1 litt. P, om. Fb.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ συνθέντι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη΄.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι μέσον περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσον περιέχουσαι· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβεβλήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν

---

1. τῇ] m. rec. P. ΑΓ b. 2. ἐστι τῷ] corr. ex ἔστω m. 2 B. τῷ] corr. ex τό F. 3. καί] om. Theon (BFVb). συντεθέντι P. ἄρα τά Theon (BFVb). τά] τό V. 4. ἐστίν P. τὸ ἀπό] in ras. m. 1 P. 5. σύμμετρα F, sed. corr. ἐστιν P. ΒΓ] postea ins. F. ῥητόν — 6. ΒΓ] (prius) om. Fb, m. 2 B. 6. γάρ] m. 2 B, δέ Fb, B m. 1. αἱ] αἱ ἀπὸ τῶν b. 7. ἄλογος — 8. ΑΓ] mg. m. 1 P. 8. πρώτη] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 10. λθ΄ F.

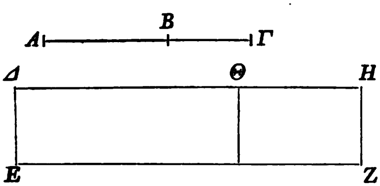
nam quoniam AB, $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, etiam $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2\,AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [cfr. p. 108, 1 sq.]. et componendo $AB^2 + B\Gamma^2 + 2\,AB \times B\Gamma$, hoc est $A\Gamma^2$ [II, 4], et $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. uerum $AB \times B\Gamma$ rationale est; supposuimus enim, AB et $B\Gamma$ spatium rationale comprehendere. itaque $A\Gamma^2$ irrationale est. ergo $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4], uocetur autem ex duabus mediis prima; quod erat demonstrandum.



XXXVIII.

Si duae mediae potentia tantum commensurabiles componuntur medium comprehendentes, tota irrationalis est, uocetur autem ex duabus mediis secunda.

Componantur enim duae mediae potentia tantum commensurabiles AB, $B\Gamma$ medium comprehendentes [prop. XXVIII]. dico, $A\Gamma$ irrationalem esse.



ponatur enim rationalis $\varDelta E$, et quadrato $A\Gamma^2$ aequale rectae $\varDelta E$ adplicetur $\varDelta Z$ latitudinem efficiens $\varDelta H$ [I, 44]. et quoniam $A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 + 2\,AB \times B\Gamma$ [II, 4],

---

12. *συντεθῶσιν* PF. 13. *ἐστι* BV, comp. Fb. 17. *γάρ*] om. FVb, m. 2 B. *ἡ*] corr. ex *α* V. *τῷ*] corr. ex *τό* m. 2 P. 21. Post *ΒΓ* add. Theon: *τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΖ, καὶ τὸ ΔΖ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς* (*τε* add. V) *ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ* (BVb, F mg. m. 1). *δὴ παρὰ τὴν ΔΕ* V. *παρὰ τὴν ΔΕ*] om. V. 22. *ἐστί*] m. 2 F. 24. *μέση* B, corr. m. 2. *ἐστί*] m. 2 V.

ΑΒ, ΒΓ. μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ· μέσον ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΘ, ΘΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπο τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΖ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἐστιν ἀσύμμετρος μήκει. αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὥστε ἡ ΔΗ ἄλογός ἐστιν. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον, καὶ ἡ δυναμένη [αὐτὸ] ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ·

1. καί] om. BFb; τὸ ὑπὸ τῶν (om. Fb) ΑΒ, ΒΓ. μέσον ἄρα Bb, postea ins. F; κείμενον· τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. μέσον ἄρα mg. m. rec. B. ὑπὸ τῶν] spat. uac. F. 3. ΖΘ] corr. ex ΘΖ V. 5. παράκεινται V. 6. ἐπεὶ οὖν] καὶ ἐπεί Theon (BFVb). 7. καί — 9. ΒΓ] om. Theon (BFVb). 9. ἀσύμμετρον — 10. ΒΓ] punctis del. V. 9. ἄρα] om. FVb, m. rec. B. ἐστίν P. ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δίς Theon (BFVb). 10. ἀλλά — 15. ΑΒ, ΒΓ (prius)] om. Theon (BFVb). In mg. καί ἐστιν lin. 7 — ΑΒ, ΒΓ lin. 15 addito κείμενον et signis ⋋ ⏀ ad locum suum relat. V (lin. 10 ἀπό pro ὑπό), eadem B mg. m. 2, nisi

rectae ΔE adplicetur $E\Theta$ quadratis $AB^2 + B\Gamma^2$ aequale. itaque reliquum $\Theta Z = 2\, AB \times B\Gamma$. et quoniam media est utraque $AB, B\Gamma$, etiam $AB^2 + B\Gamma^2$ media sunt. supposuimus autem, etiam $2\, AB \times B\Gamma$ medium esse. et $E\Theta = AB^2 + B\Gamma^2$, $Z\Theta = 2\, AB \times B\Gamma$. itaque utrumque $E\Theta$, ΘZ medium est. et rationali ΔE adplicata sunt. itaque utraque $\Delta\Theta$, ΘH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. iam quoniam AB, $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et $AB : B\Gamma = AB^2 : AB \times B\Gamma$ [prop. XXI lemma], AB^2 et $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum AB^2 et $AB^2 + B\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. XV], et $AB \times B\Gamma$, $2\, AB \times B\Gamma$ commensurabilia sunt [prop. VI]. itaque $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2\, AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. uerum $E\Theta = AB^2 + B\Gamma^2$, $\Theta Z = 2\, AB \times B\Gamma$. itaque $E\Theta$, ΘZ incommensurabilia sunt. quare etiam $\Delta\Theta$, ΘH longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. ergo $\Delta\Theta$, ΘH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare ΔH irrationalis est [prop. XXXVI]. uerum ΔE rationalis est. rectangulum autem recta irrationali et rationali comprehensum irrationale est [prop. XX]. quare spatium ΔZ irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis est [def. 4]. uerum $A\Gamma^2 = \Delta Z$. ergo $A\Gamma$ irrationalis est; uocetur

---

quod om. *ἀπό* lin. 14 — *AB*, *BΓ* lin. 15 et del. *ἀσύμμετρον* lin 13 — *ἐκ τῶν* lin. 14. 17. *ΘZ*] mut. in ZΘ V, ZΘ BFb. *ἐστίν* P. ΘZ] ZΘ Bb. 18. *ἀσύμμετρός ἐστι* V. *μήκει*] om. Fb, m. 2 B. Deinde add. *ἐδείχθησαν δὲ ῥηταί* V, m. 2 B. 19. *εἴσιν* PB. 20. *ἐστι* BV, comp. Fb. 22. *ἐστίν* P. *καί*] *ὥστε καί* V. 23. *αὐτό*] om. P. *ἐστι* PBV, comp. Fb. *δὲ ἡ ΔZ τὸ AΓ ἄρα ἄλογός ἐστιν* F.

ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Gamma$, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AB, $B\Gamma$ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ $A\Gamma$.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ μέσον ἐστίν, καὶ τὸ δὶς [ἄρα] ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ μέσον ἐστίν. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ [ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$]· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$. ὥστε καὶ ἡ $A\Gamma$ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ΄.

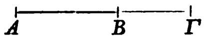
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι το μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, το δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν

2. δευτέρα] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 3. λθ΄] om. b, μ΄ F. 4. συντεθῶσιν PBF.

autem ex duabus mediis secunda. quod erat demonstrandum.

XXXIX.

Si duae rectae potentia incommensurabiles componuntur, quae summam quadratorum suorum rationalem efficiant, rectangulum autem medium, tota recta irrationalis est, uocetur autem maior.



Componantur enim duae rectae potentia incommensurabiles $AB, B\Gamma$, quae proposita efficiant [prop. XXXIII]. dico, $A\Gamma$ irrationalem esse.

nam quoniam $AB \times B\Gamma$ medium est, etiam $2\,AB \times B\Gamma$ medium est [prop. VI, XXIII coroll.]. est autem $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale. itaque $2\,AB \times B\Gamma$ et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [def. 4]. quare etiam $AB^2 + B\Gamma^2 + 2\,AB \times B\Gamma$, hoc est $A\Gamma^2$ [II, 4], et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. ergo $A\Gamma^2$ irrationale est; quare etiam $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem maior. quod erat demonstrandum.

XL.

Si duae rectae potentia incommensurabiles componuntur, quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, rectangulum autem rationale, tota recta irra-

---

5. *μέν*] *τε* V. 6. *τετράγωνον* b. *τὸ δέ* BF, *δὲ τό* b. 7. *ἐστι* V, comp. Fb. 12. *ἐστί* PBV, comp. Fb. 13. *ἄρα*] om. P. *ἐστί* PBV, comp. Fb. 16. *τά*] *τό* B. 18. *ἐστίν* P. *σύμμετρον* b, corr. m. rec. *ἐστιν* P. 19. *ῥητόν* — 20. $B\Gamma$] om. P. 20. *ἄλογος* F, corr. m. 1. 21. *ἐστι* PBV, comp. Fb. 22. *μείζων*] seq. schol., u. app. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BFb, comp. P. 23. *μα´* F. 24. *συντεθῶσιν* BF. 26. *δέ* F.

ῥητόν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μα'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

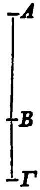
Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ, ΒΓ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ

---

1. ῥητόν, ἡ] in ras. V. ἐστι BV, comp. Fb. καλεῖται P. 3. γάρ] supra scr. m. 1 b. 4. αἵ] supra m. 1 P. προσκείμενα F, sed corr. 5. ΑΒ, corr. m. rec., P. 6. ὑπό F, corr. m. 2. 7. μέσον] μέσ- in ras. V. ἐστί PBVb, comp. F. δίς] supra scr. m. 1 V. ῥητόν] corr. ex μέσον m. 2 V. σύμμετρον B, corr. m. rec. 8. ἐστιν P. 10. τῷ — ΒΓ] bis b, mg. m. 1 P. Post καί add. συνθέντι Theon (BFVb), P m.

tionalis est, uocetur autem spatio rationali et medio aequalis quadrata.



Componantur enim duae rectae potentia incommensurabiles, quae proposita efficiant, AB, $B\Gamma$ [prop. XXXIV]. dico, $A\Gamma$ irrationalem esse.

nam quoniam $AB^2 + B\Gamma^2$ medium est, $2\,AB \times B\Gamma$ autem rationale, $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2\,AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt. quare etiam $A\Gamma^2$ et $2\,AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. uerum $2\,AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque $A\Gamma^2$ irrationale est. quare $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem spatio rationali et medio aequalis quadrata. quod erat demonstrandum.

XLI.

Si duae rectae potentia incommensurabiles componuntur, quae summam quadratorum suorum mediam efficiant, et rectangulum medium et simul summae quadratorum incommensurabile, tota recta irrationalis est, uocetur autem duobus spatiis mediis aequalis quadrata.

Componantur enim duae rectae potentia incommensurabiles AB, $B\Gamma$, quae proposita efficiant [prop. XXXV]. dico, $A\Gamma$ irrationalem esse.

ponatur rationalis ΔE, et rectae ΔE quadratis

---

rec. 12. ἄλογος — ΑΓ] mg. m. 1 P. 13. δυναμένη] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb, comp. P. 14. μα'] mut. in μβ' m. 2 F. 15. συντεθῶσιν PBF. 17. καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον] supra scr. m. 2 V. 19. τετραγώνωι PV. ἤ] m. 2 F. 20. ἐστι PBV, comp. Fb. 22. τὰ προκείμενα] τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων Theon (BFVb, τετραγώνῳ FVb).

τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΖ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥστε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΗ, ΗΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΘΔ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

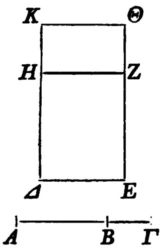
Λῆμμα.

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας, ἐξ ὧν σύγκεινται ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον·

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκάτερον τῶν Γ, Δ, ὑποκείσθω δὲ μείζων

1. ΔΕ] corr. ex ΔΑ m. 2 P. 3. ΘΔ P. 6. ΔΕ] corr. ex Δ m. rec. B. 7. διά — 9. μήκει] mg. m. 2 F. 8. ἐστιν B. τουτεστιν B. 9. ἀσύμμετρόν ἐστι τό BV. 10. τῷ — ΒΓ] mg. m. 1 P (τῷ corr. ex τό m. rec.). 11. ἄρα ἐστί P. ΔΗ] ΗΔ b. 12. ἐστι Vb, comp. F m. 2. εἰσιν B. Post αἱ del. δέ F. ἄρα] m. 2 F. 13. εἰσιν P. 14. ΔΚ] Κ e corr. m. 1 b. 16. ἐστι V, comp. b et m. 2 F. ΘΔ] in ras. Vb, ΔΘ corr. ex ΔΗ m. 2 B. ἡ ΑΓ] m. 2 B. ἄρα] γάρ B.

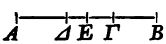
$AB^2 + B\Gamma^2$ aequale adplicetur ΔZ, rectangulo autem $2\,AB \times B\Gamma$ aequale $H\Theta$. itaque $\Delta\Theta = A\Gamma^2$ [II, 4].



et quoniam $AB^2 + B\Gamma^2$ medium est et $= \Delta Z$, etiam ΔZ medium est. et rectae rationali ΔE adplicatum est. itaque ΔH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam HK rationalis est et rectae HZ, hoc est ΔE, longitudine incommensurabilis. et quoniam $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2\,AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt, ΔZ et $H\Theta$ incommensurabilia sunt. quare etiam ΔH, HK incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales; itaque ΔH, HK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔK irrationalis est, ex duobus nominibus quae uocatur [prop. XXXVI]. ΔE autem rationalis est. itaque $\Delta\Theta$ irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis [def. 4]. est autem $A\Gamma^2 = \Delta\Theta$. ergo $A\Gamma$ irrationalis est; uocetur autem duobus spatiis mediis aequalis quadrata. quod erat demonstrandum.

Lemma.

Rectas autem irrationales, quas nominauimus, uno tantum modo in rectas diuidi, ex quibus compositae



sint proposita efficientibus, demonstrabimus huiusmodi lemmate praemisso.

---

17. δυναμένη] seq. schol., u. app. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb. 19. λῆμμα] om. BV, m. rec. P. 20. ὅτι] τι V. 21. προσκείμενα F, corr. m. 2. 22. προθέμενοι P, προσεκθέμενοι B et F, sed corr. 24. Ante εὐθεῖα ras. 3 litt. V. ἡ ὅλη] ὅλη FVb. 25. καὶ καθ' F. ἑκάτερα BV. ὑποκείσθω δέ] καὶ ὑποκείσθω P.

ἡ *ΑΓ* τῆς *ΔΒ*· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ*.

Τετμήσθω γὰρ ἡ *ΑΒ* δίχα κατὰ τὸ *Ε*. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ *ΑΓ* τῆς *ΔΒ*, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ *ΔΓ*· λοιπὴ ἄρα ἡ *ΑΔ* λοιπῆς τῆς *ΓΒ* μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ *ΑΕ* τῇ *ΕΒ*· ἐλάττων ἄρα ἡ *ΔΕ* τῆς *ΕΓ*· τὰ *Γ*, *Δ* ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς *ΕΓ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΕΒ*, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* μετὰ τοῦ ἀπὸ *ΔΕ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΕΒ*, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς *ΕΓ* ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς *ΔΕ*· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς *ΔΕ* ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς *ΕΓ*· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἔλασσόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ*. ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἔλασσόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ*. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβ΄.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ *ΑΒ* διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατα τὸ *Γ*· αἱ *ΑΓ*, *ΓΒ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ *ΑΒ* κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.

---

2. *ΑΔ*] *ΑΓ* corr. in *ΑΒ* m. rec. b. 4. Post κοινή del. δέ V. *ΔΓ*] *ΑΓ* b, *ΔΓ* καί P. 6. ἐλάσσων P. ἄρα ἐστίν P. 7. *Δ*, *Γ* P. 9. μήν] om. P. 10. τῆς *ΔΕ* V. τῷ] τοῦ b.

Ponatur recta AB et tota in Γ, Δ in partes inaequales secetur, et supponatur $A\Gamma > \Delta B$. dico, esse $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$. nam AB in duas partes aequales secetur in E. et quoniam $A\Gamma > \Delta B$, subtrahatur, quae communis est, $\Delta\Gamma$. itaque relinquitur $A\Delta > \Gamma B$. uerum $AE = EB$. itaque $\Delta E < E\Gamma$. itaque puncta Γ, Δ a puncto medio aequaliter non distant. et quoniam $A\Gamma \times \Gamma B + E\Gamma^2 = EB^2$ [II, 5], et $A\Delta \times \Delta B + \Delta E^2 = EB^2$ [id.], erit $A\Gamma \times \Gamma B + E\Gamma^2 = A\Delta \times \Delta B + \Delta E^2$. quorum $\Delta E^2 < E\Gamma^2$. itaque reliquum $A\Gamma \times \Gamma B < A\Delta \times \Delta B$. quare etiam $2\, A\Gamma \times \Gamma B < 2\, A\Delta \times \Delta B$. ergo etiam reliquum[1]) $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$; quod erat demonstrandum.

XLII.

Recta ex duobus nominibus in uno tantum puncto in nomina diuiditur.

Ex duobus nominibus sit AB in puncto Γ in nomina diuisa. itaque $A\Gamma$, ΓB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI]. dico, AB in nullo alio puncto in duas rationales potentia tantum commensurabiles diuidi.

1) Nam
$A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2\, A\Gamma \times \Gamma B = AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2\, A\Delta \times \Delta B$ (II, 4).

11. ΓB] in ras. F. 12. τῆς] postea ins. F. 13. ὧν — ΔE] om F. ἔλασον V. ἐστι] om. V. 14. ἔλαττον BVb, comp. F (in B supra scr. μεῖζον m. rec., sed del.); item lin. 16. 16. καί] supra scr. F. 18. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 V. 19. Ante ὅπερ add. εἴπερ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ (τῶν b) ἀπὸ τῆς AB Theon (BFVb), m. rec. P. 21. καθ' b. 24. κατά] supra scr. m. 1 P. εἰσιν PBF.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατα τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ ῥητὰς εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους. φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἔσται δὴ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, καὶ ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ κατὰ τὸ Γ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Δ· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἐστιν ἡ αὐτή. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ, Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπο τῶν ΑΔ, ΔΒ διαφέρει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ διαφέρει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μγ´.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

1. *διαιρείσθω* V. *καὶ κατά*] *κατά* BFVb. 3. *ΔΒ*] *ΒΔ* e corr. m. 2 V. 4. *δή*] corr. ex *δέ* V. *ΑΔ*] corr. ex *ΑΓ* V. 5. *ΓΒ*] mut. in *ΒΓ* V. *ὡς ἡ* — 6. *ἔσται*] m. 2 B. 6. *τήν*] om. Fb. *ἡ*] *ὡς ἡ* b (corr.), *ὡς* supra scr. m. 1 F. *αὐτό*] *αὐ-* e corr. V; *αὐτὸ τμῆμα* P, *τμῆμα* supra scr. m. 2 V. 7. *τῇ κατά*] m. rec. P. Post *καί* add. *τῇ* supra m. 1 V. 8. *ΔΒ*] *ΑΒ* φ. 10. *ἀπέχουσιν* B. *τοῦ διχοτομίου* P, corr. m. rec. *ᾧ*] *ὡς* φ. 12. *ΑΓ, ΓΒ* P. *τοῦ*] corr. ex *ου*



Nam, si fieri potest, in Δ diuidatur ita, ut etiam $A\Delta$, ΔB rationales sint potentia tantum commensurabiles. manifestum est igitur, $A\Gamma$ et ΔB easdem non esse. sint enim, si fieri potest. itaque etiam $A\Delta$ et ΓB eaedem erunt. et erit $A\Gamma : \Gamma B = B\Delta : \Delta A$, et AB etiam in Δ eodem modo ac in Γ diuisa erit, id quod contra hypothesim est. quare $A\Gamma$, ΔB eaedem non sunt. ea de causa Γ, Δ puncta a medio puncto aequaliter non distant [cfr. lemma]. quo igitur $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ differt [u. lemma], eo etiam $2 A\Delta \times \Delta B$ a $2 A\Gamma \times \Gamma B$ differt, quia $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 + 2 A\Gamma \times \Gamma B = AB^2 = A\Delta^2 + \Delta B^2 + 2 A\Delta \times \Delta B$ [II, 4]. uerum $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ spatio rationali differt; nam utrumque rationale est. itaque etiam $2 A\Delta \times \Delta B$ a $2 A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali differt, quamquam media sunt [prop. XXI]; quod absurdum est; nam spatium medium non excedit medium spatio rationali [prop. XXVI].

Ergo recta ex duobus nominibus non diuiditur in punctis diuersis; itaque in uno tantum diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLIII.

Recta ex duabus mediis prima in uno tantum puncto diuiditur.

m. rec. P. τῶν] om. P. $A\Gamma$, ΓB] $A\Delta$, ΔB P. 15. AB] supra scr. Δ b. 16. Post ΓB ras. magna V. τῶν] corr. ex τῷ b. 17. ἄρα] supra scr. m. 2 F. $A\Delta B$ P, corr. m. rec. 18. $A\Gamma B$ Pb, corr. m. rec. 19. ὅπερ ἄτοπον] om. Theon (BFVb). γάρ] δέ Theon (BFVb). 21. διερεῖται P, corr. m. rec. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 25. διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα Theon (BFVb).

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν, ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσα ὄντα· ὅπερ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ' ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ'.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

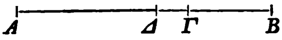
Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερὸν δή, ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τῆς διχοτομίας, ὅτι οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε

---

1. ἡ ΑΒ] supra scr. F, corr. ex ἡ ΑΔ m. rec. P. 4. οὐ] om. b. 5. καί] om. Fb. 9. τῶν ἀπό] in ras. m. 1 P. 10. ΔΒ] supra scr. m. 1 F. 13. Post ὄντα add. μέσον μέσου ὑπερέχει ῥητῷ φ. 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 17. μδ'] mut. in με' F. 19. διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα

Sit AB ex duabus mediis prima in Γ ita diuisa, ut $A\Gamma$, ΓB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes [prop. XXXVII].



dico, AB in nullo alio puncto diuidi.

nam, si fieri potest, in Δ ita diuidatur, ut etiam $A\Delta$, ΔB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes. iam quoniam, quo differt $2\,A\Delta \times \Delta B$ a $2\,A\Gamma \times \Gamma B$, eo differt $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ [prop. XLI lemma], et $2\,A\Delta \times \Delta B$ a $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali differt (nam utrumque rationale est), etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ spatio rationali differt, quamquam media sunt; quod absurdum est [prop. XXVI].

Ergo recta ex duabus mediis prima in nomina non diuiditur in punctis diuersis; itaque in uno tantum diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLIV.

Recta ex duabus mediis secunda in uno tantum puncto diuiditur.

Sit AB ex duabus mediis secunda in Γ diuisa, ita ut $A\Gamma$, ΓB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehendentes [prop. XXXVIII]. manifestum est igitur, Γ punctum medium non esse, quod longitudine commensurabiles non sunt. dico, AB in nullo alio puncto diuidi.

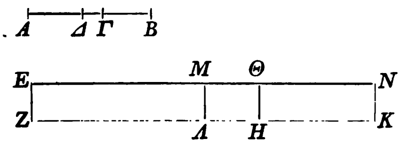
nam, si fieri potest, etiam in Δ diuidatur, ita ut

Theon (BFVb). 23. ἔστιν B. τὴν διχοτομίαν V. ὅτι] ἐπειδήπερ Theon (BFVb). εἰσίν PB. 26. καί] om. Theon (BFVb).

τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ· δῆλον δή, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον παραβεβλήσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα [καὶ] τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· δυνάμει γάρ εἰσι

1. ΑΓ] Γ in ras. F. 2. κατά P. δῆλον δή, ὅτι] δηλαδή Theon (BFVb); ὅτι add. B m. 2. 3. ΑΓ, ΓΒ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν Theon (BFVb). 4. Ante καί add. ἔστω δέ* V, et in mg. m. 1 *ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ ΑΓ, ΓΒ. 5. κείσθω V, corr. m. 1. 6. τῷ] corr. ex τό V. 7. παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον] om. Theon (BFVb). 9. ΘΚ] in ras. V. 10. ἅπερ — 11. ΓΒ] om. Fb, mg. m. 2 BV. 11. ἐλάττονα V. 12. ΕΛ] ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ B. Deinde add. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἔλασσον ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ B, ἐπεὶ καὶ (καὶ ἐπεί V) τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἐλάσσονα (ἐλάττονα F) ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ FVb, in V del.

$A\Gamma$, ΔB eaedem non sint, sed $A\Gamma$ maior supponatur (manifestum est igitur, esse etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2 < A\Gamma^2 + \Gamma B^2$, ut supra demonstrauimus [prop. XLI lemma]), et ut $A\Delta$, ΔB mediae sint potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehendentes. et pona-



tur rationalis EZ, et quadrato AB^2 aequale rectae EZ parallelogrammum rectangulum EK adplicetur [I, 44], quadratis autem $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ aequale auferatur EH. itaque quod relinquitur, $\Theta K = 2\ A\Gamma \times \Gamma B$ [II, 4]. rursus quadratis $A\Delta^2 + \Delta B^2$ (quae minora esse quam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$, demonstrauimus) aequale auferatur $E\Lambda$. itaque $MK = 2\, A\Delta \times \Delta B$. et quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ media sunt, EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est. ergo $E\Theta$ rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam ΘN rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis. et quoniam $A\Gamma$, ΓB mediae sunt potentia tantum commensurabiles, $A\Gamma$ et ΓB longitudine incommensurabiles sunt. sed $A\Gamma : \Gamma B = A\Gamma^2 : A\Gamma \times \Gamma B$ [prop. XXI lemma]. itaque etiam $A\Gamma^2$ et $A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop.

ἐστὶ τῷ P. 13. ἐστί] in ras. m. 1 b, ἐστίν B. 14. καὶ τό] τό BFVb. 16. ΘN] EH b, EN in ras. m. 1 F. 17. ἐστιν P. 18. εἰσίν B. 19. ΓB] $B\Gamma$ B. 20. ΓB] in ras. V. 21. σύμμετρον V, corr. m. 1. $A\Gamma$] A e corr. V. 22. ἀλλά] supra scr. m. 1 V. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. τῷ μὲν] e corr. V. 23. ΓB] B eras. B.

σύμμετροι αἱ ΑΓ, ΓΒ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη τό τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ· πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΕΗ, μεῖζόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτέστι τοῦ ΜΚ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. Supra *σύμμετροι* add. *ά* Fb. *τῷ δέ — ΓΒ*] mg. m. 1 P. 2. *τό*] corr. ex *τῷ* Vb. *τά*] supra scr. m. 2 F. 3. *σύμμετρα* b, et B, corr. m. 2; *ά-* del. F. 4. *ΓΒ μήκει* V. *ΓΒ*] (alt.) *Γ* e corr. V. 5. *ἴσον ἐστί* P. 6. *ἐστίν* P. *ΕΗ*] *Η* in ras. V. 8. *ΕΘ*] *''Θ'Ε* F. *εἰσιν* P. 9. *ἐντεθῶσιν* B, corr. m. 2. 10. *ἐκ*] *ἐκ τῶν* F. 11. *ἄρα*] om. P. *ἐστίν* P. 12. *ΘΚ* b. 15. *ἔστιν*] *ἔσται* V. *ἡ*] supra scr. m. 1 F. *ἡ*] postea ins. F. *ὅτι*] *ἐπειδήπερ* Theon (BFVb). 17. Mg. m. 1: *γρ. τὰ δὲ ἀπὸ* (*τῶν Α, Δ* F) Fb. 18. *τῶν ΑΔ* FV. 19. *τουτέστι* P. 20. *τουτέστιν* P. *τοῦ*] *e corr. V.* *ΜΚ*] *Μ* seq. ras. 1 litt. B. *ἡ*] supra scr. m.

XI]. uerum $A\Gamma^2$ et $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ commensurabilia sunt; nam $A\Gamma$, ΓB potentia commensurabiles sunt. et $A\Gamma \times \Gamma B$, $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ commensurabilia sunt [prop. VI]. quare etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ et $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. uerum $EH = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$, $\Theta K = 2\,A\Gamma \times \Gamma B$. itaque EH, ΘK incommensurabilia sunt. quare etiam $E\Theta$, ΘN longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales. itaque $E\Theta$, ΘN rationales sunt potentia tantum commensurabiles. sin duae rectae rationales potentia tantum commensurabiles componuntur, tota irrationalis est ex duobus nominibus, quae uocatur [prop. XXXVI]. itaque EN ex duobus nominibus est in Θ diuisa. eodem igitur modo demonstrabimus, etiam EM, MN rationales esse potentia tantum commensurabiles. et EN, quae ex duobus nominibus est, in punctis diuersis Θ et M diuisa erit [quod absurdum est; prop. XLII], et $E\Theta$, MN eaedem non sunt, quod $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > A\Delta^2 + \Delta B^2$; uerum $A\Delta^2 + \Delta B^2 > 2\,A\Delta \times \Delta B$.[1]) quare multo magis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > 2\,A\Delta \times \Delta B$, hoc est $EH > MK$. quare etiam $E\Theta > MN$ [VI, 1]. itaque $E\Theta$, MN eaedem non sunt; quod erat demonstrandum.

---

1) U. prop. LIX lemma.

---

1 b. 21. *μεῖζον* V, sed corr. *τῇ*] *τῆς* b. Post *αὐτή* add. *ἡ EN ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων καλουμένη κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐκ δύο μέσων δευτέρα κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται ἢ καθ᾽ ἓν μόνον* F. 22. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BVb.

με΄.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεί, ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα μόνον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μϛ΄.

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους

1. μϛ΄ F. 2. Supra τό add. m. 2 καὶ ἕν P. διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα Theon (BFVb). 5. ΓΒ] supra scr. B. Supra ποιούσας scr. καί m. 1 V. 6. ΑΓ] ΓΑ Fb; mg. m. 1 ΑΒ, ΒΓ b. τετραγώνων] supra scr. ο b, -ων in ras. V. 7. ῥητός F. δέ BF. 9. καί] om. Theon (BFVb). 10. δυ-

XLV.

Recta maior in uno tantum puncto diuiditur.

Sit AB maior in Γ ita diuisa, ut $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sint efficientes summam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ rationalem, $A\Gamma \times \Gamma B$ autem medium [prop. XXXIX]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi.



nam, si fieri potest, etiam in Δ diuidatur, ita ut $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sint efficientes summam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ rationalem, $A\Delta \times \Delta B$ autem medium. et quoniam, quo $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ab $A\Delta^2 + \Delta B^2$ differt [prop. XLI lemma], eo etiam $2\,A\Delta \times \Delta B$ a $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ differt [cfr. p. 122, 10 sq.], et $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ excedit $A\Delta^2 + \Delta B^2$ spatio rationali (nam utrumque rationale est), etiam $2\,A\Delta \times \Delta B$ excedit $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali, quamquam media sunt; quod fieri non potest [prop. XXVI]. itaque maior non diuiditur in punctis diuersis. ergo in uno tantum diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLVI.

Recta spatio rationali et medio aequalis quadrata in uno tantum puncto diuiditur.

Sit AB recta spatio rationali et medio aequalis quadrata in Γ ita diuisa, ut $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sint efficientes $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ medium,

---

νάμεις P, corr. m. 1. 11. τῶν ἀπό] m. 2 V. ῥητῶν F. 12. δέ F. ἀτῶν P, corr. m. 1. 14. τό] corr. ex τοῦ V. 17. τό] τά V. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 24. Post διαιρεῖται add. εἰς τὰ ὀνόματα Theon (BFVb), P m. 2.

εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητόν· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ῥητόν. ἐπεὶ οὖν, ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ μέσα ὄντα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται. κατὰ ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μζ'.

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἔστω [δύο μέσα δυναμένη] ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν. λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται ποιοῦσα τὰ προκείμενα.

---

2. ΓΒ] in ras. V. δέ] δ' B, συγκείμενον ἐκ τῶν V. δίς] om. Theon (BFVb). ὑπό] corr. ex ἀπό V. 3. Post λέγω ras. 1 litt. F. ΑΒ εὐθεῖα V. 4. καί] om. Bb, postea add. FV. 5. καί] supra scr. V. 6. ἀπὸ τῶν — 7. ῥητόν] in *ras. m. 1 F.* 6. ΔΒ] ΔΒ, ΚΖ b. 7. δέ] δ' BFb, δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν V. δίς] om. Theon (BFVb). 10. δέ] om.

$2\,A\Gamma \times \Gamma B$ autem rationale [prop. XL]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi.



nam si fieri potest, etiam in Δ ita diuidatur, ut $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sint efficientes $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medium, $2\,A\Delta \times \Delta B$ autem rationale. iam quoniam, quo differt $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ a $2\,A\Delta \times \Delta B$, eo etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ ab $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ differt, $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ autem $2\,A\Delta \times \Delta B$ excedit spatio rationali, etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ spatio rationali, quamquam media sunt; quod fieri non potest [prop. XXVI]. itaque recta spatio rationali et medio aequalis quadrata non diuiditur in punctis diuersis. ergo in uno tantum puncto diuiditur; quod erat demonstrandum.

XLVII.

Recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata in uno tantum puncto diuiditur.

Sit AB in Γ ita diuisa, ut $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sint efficientes $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ medium et $A\Gamma \times \Gamma B$ medium et simul quadratis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ incommensurabile [prop. XLI]. dico, AB in nullo alio puncto diuidi, ita ut proposita efficiat.

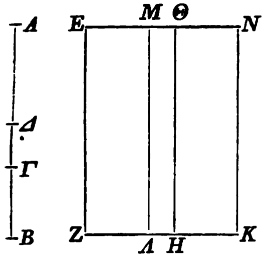
BV. δὶς ἄρα V. 11. τά] τό P. 12. τῶν] (alt.) corr. ex τά m. 2 F. 14. σημεῖα P, corr. m. 1. 15. καθ' BFb. κατά — 16. δεῖξαι] m. 2 V. 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BF. 17. μζ'] e corr. F. 18. ἡ δύο μέσα] in ras. m. 1 F. 19. διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα Theon (BFVb). 20. δύο μέσα δυναμένη] om. P. 23. καὶ τό — μέσον] mg. m. 1 P. τό] τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν V. 24. τῷ συγκειμένῳ] ego; τὸ συγκείμενον PBFVb. Post αὐτῶν add. τῷ (corr. ex τό m. rec. P) συγκειμένῳ (corr. ex -μενον m. rec. P) ἐκ τῶν ὑπ' (corr. ex ἀπ' m. 2 V, ἀπ' b) αὐτῶν (τετραγώνων add. b, F m. 2) BFVb, P mg. m. 1.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΗΝ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διῄρηται. καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διῄρηται· ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον [σημεῖον] διαιρεῖται.

---

1. *καὶ κατά* V. 3. *κείσθω* P. 6. *ΕΚ*] corr. ex *ΘΚ* m. 2 P. 10. *ἐστί* BV, comp. Fb. 13. *ΘΕ*] *ΕΘ* P. 14. *ἐστιν* P. 15. *τό* — 16. *τῷ*] in ras. m. 1 F. 16. *τῷ*] *τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν* (*τοῦ* F) FVb. *δίς*] supra scr. F. *ὑπό*] in ras. F. *ΓΒ*] *ΒΓ′* F. *ΕΝ* b. 17. *ἄρα*] om. V. *τῷ*] mut. in *τῶν* m. 2 V. *ΗΝ*] *ΘΚ* BFb, *ΘΚ ἄρα* V. 18. *ἐστιν*] comp. Fb, *ἐστι μήκει* V. *εἰσιν* PB. 19. *εἰσιν* PB.

nam, si fieri potest, in Δ ita diuidatur, ut scilicet rursus $A\Gamma$, ΔB eaedem non sint, sed supponatur maior



$A\Gamma$, et ponatur rationalis EZ, et rectae EZ quadratis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ aequale adplicetur EH, rectangulo autem $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ aequale ΘK. itaque $EK = AB^2$ [II, 4]. iam rursus rectae EZ quadratis $A\Delta^2 + \Delta B^2$ aequale adplicetur $E\Lambda$. itaque quod relinquitur, $2\,A\Delta \times \Delta B = MK$. et quoniam supposuimus, $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ medium esse, etiam EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est; itaque ΘE rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam ΘN rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis. et quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ et $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt, etiam EH, HN incommensurabilia sunt. quare etiam $E\Theta$, ΘN incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales. itaque $E\Theta$, ΘN rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EN ex duobus nominibus est in Θ diuisa [prop. XXXVI]. similiter demonstrabimus, eandem in M diuisam esse. et $E\Theta$, MN eaedem non sunt. itaque recta ex duobus nominibus in punctis diuersis diuisa est; quod fieri non potest [prop. XLII]. itaque recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata non diuiditur in punctis diuersis. ergo in uno tantum diuiditur.

---

21. διαιρεῖται V. 22. MN ἄρα b. ἐκ τῶν P. 23. ἄτοπόν ἐστιν V. 24. ἢ] corr. ex ἐκ V. 25. ἕνα F. σημεῖον] om. P.

Ὅροι δεύτεροι.

α΄. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω [ἡ ὅλη] ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.

β΄. Ἐὰν δὲ τὸ ἐλάσσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.

γ΄. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.

δ΄. Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα [τοῦ ἐλάσσονος] μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.

ε΄. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον, πέμπτη.

ϛ΄. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

μη΄.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν $ΑΒ$ πρὸς μὲν τὸν $ΒΓ$ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν $ΓΑ$ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω

---

1. ὅροι δεύτεροι] mg. B, m. 2 V, om. F, μη΄ b. numeros om. codd. 4. ἐλάττονος BFb. αὑτῇ B, corr. m. rec.; et supra scr. ῳ b; ἑ- e corr. V. 5. μήκει] (alt.) om. V, m. 2 F (eras.). 6. ῥητῇ μήκει FV. ἡ ὅλη] supra scr. m. 2 P, ὅλη B.

Definitiones alterae.

1. Proposita recta rationali et recta ex duobus nominibus in nomina diuisa, cuius nomen maius potentia minus excedit quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis, si maius nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus prima.

2. Sin minus nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus secunda.

3. Sin neutrum nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus tertia.

4. Rursus si maius nomen potentia excedit quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, si maius nomen rationali propositae longitudine commensurabile est, uocetur ex duobus nominibus quarta.

5. Sin minus commensurabile est, quinta.

6. Sin neutrum, sexta.

XLVIII.

Inuenire rectam ex duobus nominibus primam.

Exponantur duo numeri $A\Gamma$, ΓB eius modi, ut $AB : B\Gamma$ rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, AB autem ad ΓA rationem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma], et exponatur ratio-

---

8. μήκει] om. V. 9. ῥητῇ μήκει V. ἡ ὅλη ἐκ F. 14. τοῦ ἐλάσσονος] m. 2 P, τοῦ ἐλάττονος V. 15. συμμέτρου BFb, corr. m. 2. ἑαυτῇ] supra scr. ω b. 16. ὄνομα] om. V. 19. Seq. schol., u. app. 20. μθ′ F. 23. τόν] (prius) corr. ex τῶν V. 25. ΓA] ras. V.

τις ῥητὴ ἡ *Δ*, καὶ τῇ *Δ* σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ *ΕΖ*. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ΕΖ*. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ *ΒΑ* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *ΑΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*. ὁ δὲ *ΑΒ* πρὸς τὸν *ΑΓ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥςτε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*. καί ἐστι ῥητὴ ἡ *ΕΖ*· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ *ΖΗ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *ΒΑ* πρὸς τὸν *ΑΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΕΖ* τῇ *ΖΗ* μήκει. αἱ *ΕΖ*, *ΖΗ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ *ΕΗ*.

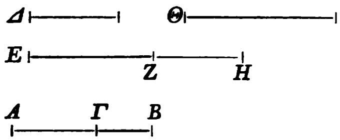
Λέγω, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ *ΒΑ* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *ΑΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*, μείζων δὲ ὁ *ΒΑ* τοῦ *ΑΓ*, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* τοῦ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν *ΖΗ*, *Θ*. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ *ΒΑ* πρὸς τὸν *ΑΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ *ΑΒ* πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Θ*. ὁ δὲ *ΑΒ* πρὸς τὸν *ΒΓ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Θ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΕΖ* τῇ

---

1. *τις*] supra scr. m. 1 V. 2. *ἐστὶ καί*] *ἐστίν* B. 3. *ΑΓ*] *ΓΑ* FVb. Dein add. *ἀριθμόν* V. 4. *ΖΗ*] *Η* eras. F. *ὁ δέ — 5. ἀριθμόν*] mg. m. 2 B. 5. ὃν ὁ F. 8. *ἐστιν* B.

nalis aliqua Δ, et rectae Δ longitudine commensurabilis sit EZ; itaque EZ rationalis est [def. 3]. et fiat $BA : A\Gamma = EZ^2 : ZH^2$ [prop. VI coroll.]. uerum $AB : A\Gamma$ rationem habet, quam numerus ad numerum. itaque



etiam $EZ^2 : ZH^2$ rationem habet, quam numerus ad numerum. quare EZ^2, ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et EZ rationalis est. itaque etiam ZH rationalis est. et quoniam $BA : A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne EZ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque EZ, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. dico, eandem primam esse.

nam quoniam est $BA : A\Gamma = EZ^2 : ZH^2$, et $BA > A\Gamma$, erit etiam $EZ^2 > ZH^2$ [V, 14]. sit igitur $ZH^2 + \Theta^2 = EZ^2$. et quoniam est $BA : A\Gamma = EZ^2 : ZH^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] est $AB : B\Gamma = EZ^2 : \Theta^2$. uerum $AB : B\Gamma$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque etiam $EZ^2 : \Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare EZ, Θ longitudine commensurabiles sunt [prop.

---

9. BA] mut. in AB V. οὐκ] postea ins. F. 14. ZH — δυνάμει] m. 2 B. εἰσιν P. 15. ἄρα] m. rec. b. 17. ὁ] in ras. m. 1 P. AB F. 18. τό] (prius) supra scr. m. 1 P. μεῖζον F. 20. τῷ] corr. ex τό V. 21. AB P. 25. τόν] om. BFb. $B\Gamma$] Γ supra scr. V. 26. EZ] ZE corr. ex ZB F. 27. Θ] *seq. ras.* 1 litt. F.

Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μθ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ΕΖ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπο τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

---

2. *εἰσιν* PB. 3. *ἀσύμμετρος* F, *ἀ-* eras.; deinde ad[d] *μήκει*, del. m. 1. Post *μήκει* del. *ἀσύμμετροι* m. 1 F. [4] *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. BFVb. 6. *ν'* F, et sic dei[n]ceps. 8. *τόν*] corr. ex *τό* m. 2 V. 11. *ΓΑ* BVb. 1[2] *τετράγωνος* F. 13. ΕΖ] *ΖΗ* BVb, in ras. F, m. rec. P. 1[4] *ῥητή* — ΕΖ] *καὶ ἡ ΖΗ ἄρα ῥητή ἐστιν* F. ΕΖ] *ΖΗ* BV[b] m. rec. P. *γεγονέτω δή καί*] *καὶ ἔστω* V. *δέ* F, su[p]scr. *δή*. 15. *ΕΖ*] *ΗΖ* F, et corr. ex *ΖΗ* V, *ΖΗ* Bb, P

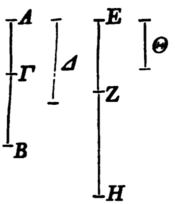
IX]. itaque EZ^2 excedit ZH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et EZ, ZH rationales sunt, et EZ, Δ longitudine commensurabiles.

Ergo EH ex duobus nominibus est prima [def. alt. 1]; quod erat demonstrandum.

XLIX.

Inuenire rectam ex duobus nominibus secundam.

Exponantur duo numeri $A\Gamma$, ΓB eius modi, ut AB ad $B\Gamma$ rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ad $A\Gamma$ autem rationem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma]. et ponatur rationalis Δ, et rectae Δ longitudine commensurabilis sit EZ; itaque EZ rationalis est. iam fiat etiam $\Gamma A : AB = EZ^2 : ZH^2$ [prop. VI coroll.]. itaque EZ^2, ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. quare etiam ZH rationalis est. et quoniam $\Gamma A : AB$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne EZ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque EZ, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. iam demonstrandum, eandem secundam esse.



---

rec. 16. ZH] ZE BFVb, m. rec. P; item lin. 17 bis, 20, 22. 16. EZ] HZ Bb, et corr. ex ZH V, ZH F, P m. rec. 17. ἐστίν B. 18. ΓA] in ras. V. 19. οὐδ' ἄρα Theon (BFVb). 20. EZ] HZ BFV, et e corr. m. 1 b. 22. EZ] HZ Bb, P m. rec.; ZH V, ZH' F. τῆς b. 23. εἰσιν B. 25. δέ P.

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ, μεῖζον ἄρα [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἀλλ' ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΖΗ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΖΗ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΕΖ ἔλασσον ὄνομα τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρόν ἐστι τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ν'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τε-

---

1. *ΑΒ* P. *ἀριθμός*] om. b. 2. *ΗΖ*] ΕΖ BFVb, m. rec. P, item lin. 4 bis. ΖΕ] Ζ*Η* BFVb, m. rec. P, item lin. 4, 11. 3. *μείζων — ΑΓ*] mg. m. 1 P (*μεῖζον*, sed corr. m. 1). *ΒΑ*] *Α* e corr. V. *καί*] om. P. 5. ΕΖ] *ΗΖ* BFVb, m. rec. P. ὁ] ἡ b φ (non F). 6. Ζ*Η*] ΕΖ BFVb, *m. rec. P, item* lin. 9, 11 bis. 8. καί — 10. ἀριθμόν] mg. m.

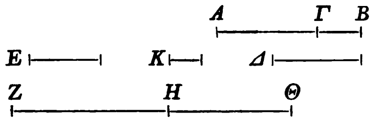
nam quoniam e contrario est [V, 7 coroll.] $BA : A\Gamma = HZ^2 : ZE^2$, et $BA > A\Gamma$, erit $HZ^2 > ZE^2$ [V, 14]. sit $HZ^2 = EZ^2 + \Theta^2$. conuertendo [V, 19 coroll.] igitur est $AB : B\Gamma = ZH^2 : \Theta^2$. uerum $AB : B\Gamma$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque etiam $ZH^2 : \Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH, Θ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. quare ZH^2 excedit ZE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et rationales sunt ZH, ZE potentia tantum commensurabiles, et minus nomen EZ rationali propositae Δ commensurabilis est longitudine.

Ergo EH ex duobus nominibus secunda est [def. alt. 2]; quod erat demonstrandum.

L.

Inuenire rectam ex duobus nominibus tertiam.

Exponantur duo numeri $A\Gamma$, ΓB eius modi, ut AB ad $B\Gamma$ rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ad $A\Gamma$ autem rationem non habeat,



quam numerus quadratus ad numerum quadratum. exponatur autem etiam alius aliquis numerus non quadratus Δ, et ad utrumque BA, $A\Gamma$ rationem ne habeat,

1 F. 12. εἰσιν B. 13. EZ, ZH BFVb, m. rec. P. 14. EZ] ZH BFVb, m. rec. P. ἔλαττον BVb, comp. F. σύμμετρόν ἐστι τῇ Theon (BFVb). σύμμετρόν ἐστι] om. Theon (BFVb). 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 20. κείσθωσαν, supra scr. ἐκ, V. δύο] corr. ex οἱ m. rec. P. 25. ἀριθμός] om. V.

τράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ *E*, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ *Δ* πρὸς τὸν *AB*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *E* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ZH*· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *E* τῷ ἀπὸ τῆς *ZH*. καί ἐστι ῥητὴ ἡ *E*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ZH*. καὶ ἐπεὶ ὁ *Δ* πρὸς τὸν *AB* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς *E* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *E* τῇ *ZH* μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ἡ *BA* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *AΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *HΘ*· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* τῷ ἀπὸ τῆς *HΘ*. ῥητὴ δὲ ἡ *ZH*· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ *HΘ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *BA* πρὸς τὸν *AΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΘH* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ZH* τῇ *HΘ* μήκει. αἱ *ZH*, *HΘ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ *ZΘ* ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ *Δ* πρὸς τὸν *AB*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *E* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ZH*, ὡς δὲ ὁ *BA* πρὸς τὸν *AΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *HΘ*, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ *Δ* πρὸς τὸν *AΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *E* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *HΘ*. ὁ δὲ *Δ* πρὸς τὸν *AΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς *E* ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *HΘ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

---

2. ῥητή] m. 2 F. 3. τῇ *ZH* b. 4. τό — 5. *ZH*] (prius) m. *2 B.* 5. *καί ἐστι ῥητή*] ῥητὴ δέ B. ἐστίν B. 10. *δέ* V.

quam numerus quadratus ad numerum quadratum; et ponatur aliqua recta rationalis E, et fiat $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$ [prop. VI coroll.]. itaque E^2, ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et E rationalis est; quare etiam ZH rationalis est. et quoniam $\Delta : AB$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne E^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque E, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. iam rursus fiat $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$ [prop. VI coroll.]. itaque ZH^2, $H\Theta^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum ZH rationalis est; itaque etiam $H\Theta$ rationalis est. et quoniam $BA : A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH, $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare ZH, $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $Z\Theta$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. iam dico, eandem tertiam esse. nam quoniam est $\Delta : AB = E^2 : ZH^2$ et $BA : A\Gamma = ZH^2 : H\Theta^2$, ex aequo [V, 22] erit $\Delta : A\Gamma = E^2 : H\Theta^2$. uerum $\Delta : A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad

---

11. BA] AB' F. τόν] om. B. 14. ΓA F. 16. ΘH] in ras. V, $H\Theta$ F. 18. ἐστίν] ἐστὶ καί F. ZH] e corr. m. 2 (ex HZ?) V. τῇ] m. rec. P. ΘH F. 19. $H\Theta$] in ras. V. εἰσιν B. 20. ἐστί BV, comp. Fb. 22. ὡς] supra scr. m. 1 F. 23. ZH] HZ F. BA] AB P, AB' F. 24. τόν] om. P. $A\Gamma$] corr. ex AB m. 1 F. 25. $H\Theta$] $Z\Theta$ P, corr. m. rec. (euan.). 28. τετράγωνος F, corr. m. 1.

πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα [ἐστὶν] ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

να'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα

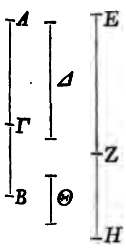
1. ἐστίν] m. 2 F, om. B. 3. τό] (alt.) om. b. 4. τῆς] (alt.) om. b. 6. ἐστίν] om. P. τόν] om. Fb. 11. ἐστίν] om. BFVb. 12. ἄρα] m. 2 V. δύναται] -να- in ras. P. 13. ἀσυμμέτρου F, corr. m. rec.; ἀ- supra scr. F m. 2. ΗΘ ἄρα V. 15. ἔστιν B. τῇ Ε ἔστιν F. 16. τρίτη] corr. ex ῥητή m. rec. b; ῥητή F, mg. γρ. τρίτη m. rec. ὅπερ ἔδει

numerum quadratum. itaque ne E^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare E, $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et quoniam est $BA:A\Gamma = ZH^2:H\Theta^2$, erit $ZH^2 > H\Theta^2$ [V, 14]. sit igitur $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$. itaque conuertendo [V, 19 coroll.] $AB:B\Gamma = ZH^2:K^2$. uerum $AB:B\Gamma$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare etiam $ZH^2:K^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH, K longitudine commensurabiles sunt. itaque ZH^2 excedit $H\Theta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis. et ZH, $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et neutra rectae E longitudine commensurabilis est.

Ergo $Z\Theta$ ex duobus nominibus tertia est [def. alt. 3]; quod erat demonstrandum.

LI.

Inuenire rectam ex duobus nominibus quartam.



Exponantur duo numeri $A\Gamma$, ΓB eius modi, ut AB neque ad $B\Gamma$ neque ad $A\Gamma$ rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma]. et ponatur rationalis Δ, et rectae Δ longitudine commensurabilis sit EZ. itaque EZ rationalis est. et fiat $BA:A\Gamma = EZ^2:ZH^2$ [prop. VI coroll.]. itaque EZ^2, ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. itaque etiam ZH ra-

δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 21. *τὸν ΒΓ*] *ἑκάτερον αὐτῶν* Theon (BFVb). *ΒΓ*] corr. ex *ΑΓ* m. 1 P. μήτε — 22. *ΑΓ*] om. Theon (BFVb). 24. *ἐστίν* B. 25. ΒΑ] Α''Β' F. *ἀριθμός] om. V.* *ΓΑ* F. 26. σύμμετρος P, corr. m. 1.

ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* τῷ ἀπὸ τῆς *ZH*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ZH*. καὶ ἐπεὶ ὁ *BA* πρὸς τὸν *AΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *EZ* τῇ *ZH* μήκει. αἱ *EZ*, *ZH* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ *EH* ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ *BA* πρὸς τὸν *AΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ZH* [μείζων δὲ ὁ *BA* τοῦ *AΓ*], μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* τοῦ ἀπὸ τῆς *ZH*. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς *EZ* ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν *ZH*, *Θ*· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ *AB* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *BΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Θ*. ὁ δὲ *AB* πρὸς τὸν *BΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *EZ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Θ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *EZ* τῇ *Θ* μήκει· ἡ *EZ* ἄρα τῆς *HZ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ *EZ*, *ZH* ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ *EZ* τῇ *Δ* σύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἡ *EH* ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. Post *ZH* add. ῥητὴ δὲ (seq. ras. 1 litt. F) ἡ *EZ* b, m. 2 F. ῥητὴ ἄρα] ἡ EZ ῥητὴ ἄρα V m. 2, ῥητή ἐστιν ἄρα b. ἐστί] om. b, ἐστίν PB. 2. καί] (prius) om. BFb. *BA*] *AB* P. οὐκ] postea add. m. 1 F. 6. τῇ] τῆς b. 7. εἰσιν B. 8. ἐστί BV, comp. Fb. 9. δή] supra scr. m. 1 P. καί] *m. 2 F.* 10. *BA*] corr. ex *AB* V. τόν] om. Bb, corr. ex *τό m. rec. P.* 11. μείζων — 12. *AΓ*] mg. m. 1 in ras. P.

tionalis est. et quoniam $BA : A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne EZ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque EZ, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare EH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

Iam dico, eandem quartam esse. nam quoniam est $BA : A\Gamma = EZ^2 : ZH^2$, erit $EZ^2 > ZH^2$ [V, 14]. sit igitur $EZ^2 = ZH^2 + \Theta^2$. itaque conuertendo [V, 19 coroll.] $AB : B\Gamma = EZ^2 : \Theta^2$. uerum $AB : B\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne EZ^2 quidem ad Θ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare EZ, Θ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. EZ^2 igitur excedit ZH^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis. et EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et EZ, Δ longitudine commensurabiles sunt.

Ergo EH ex duobus nominibus est quarta [def. alt. 4]; quod erat demonstrandum.

---

11. BA] A e corr. V. 12. τῆς] (prius) om. P. 13. τῷ] τό F. 16. τόν] om. BFb. 18. Θ] $\Theta\Lambda$ b. 20. ἐστίν] om. Fb. ἄρα] om. F. τῆς] corr. ex τῇ V. HZ] corr. ex ZH V, EH F. 21. συμμέτρου b, corr. m. rec., et F, corr. m. 2. ἑαυτῇ μήκει F. 24. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb.

νβ΄.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ *ΑΓ*, *ΓΒ*, ὥστε τὸν *ΑΒ* πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητή τις εὐθεῖα ἡ *Δ*, καὶ τῇ *Δ* σύμμετρος ἔστω [μήκει] ἡ *ΕΖ*· ῥητὴ ἄρα ἡ *ΕΖ*. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ *ΓΑ* πρὸς τὸν *ΑΒ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*. ὁ δὲ *ΓΑ* πρὸς τὸν *ΑΒ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. αἱ *ΕΖ*, *ΖΗ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ *ΕΗ*.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ *ΓΑ* προς τὸν *ΑΒ*, οὕτως το ἀπὸ τῆς *ΕΖ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*, ἀνάπαλιν ὡς ὁ *ΒΑ* πρὸς τὸν *ΑΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΕ*· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΖ* τοῦ ἀπὸ τῆς *ΖΕ*. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς *ΗΖ* ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν *ΕΖ*, *Θ*· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ *ΑΒ* ἀριθμὸς πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΖ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Θ*. ὁ δὲ *ΑΒ* πρὸς τὸν *ΒΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν

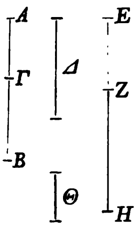
---

3. *τόν*] corr. ex *τό* V. 7. *μήκει*] om. P. *ΕΖ*] *ΖΗ* Theon (BFVb), *ΗΖ* m. rec. P. *ῥητὴ ἄρα ἡ ΕΖ*] *ῥητὴ ἄρα ἡ ΖΗ* V, mg. *ῥητὴ τῇ ἄρα ΗΖ* m. 2. *ΕΖ*] *ΖΗ* Theon (BFb), *ΗΖ* P m. rec. 8. *ΕΖ*] Z post ras. 1 litt. V, *ΖΗ* F, *ΗΖ* Bb, P m. rec. 9. *ΖΗ*] *ΖΕ* Theon (BFVb), m. rec. P. Deinde add. *σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. καὶ ἐπεί* Theon (BFVb), P m. rec. (*ΖΗ* pro *ΗΖ*). *δέ*] om. Theon (BFVb). *τόν*] om. BFb. 11. *τῆς*] (prius) m. 2 B. *ΕΖ*] *ΗΖ* FVb, m. 2 B, m. rec. P. *ἄρα*] om. B. *πρὸς τὸ ἀπό*] m. 2 B. *ΖΗ*] P, *ΖΕ* BFVb,

LII.

Inuenire rectam ex duobus nominibus quintam.

Exponantur duo numeri $A\Gamma$, ΓB eius modi, ut AB ad neutrum rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum [prop. XXVIII lemma], et ponatur recta aliqua rationalis Δ, et rectae Δ commensurabilis sit EZ. itaque EZ rationalis est. et fiat



$$\Gamma A : AB = EZ^2 : ZH^2$$

[prop. VI coroll.]. ΓA autem ad AB rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne EZ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare EZ, ZH rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. IX]. ergo EH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eandem quintam esse. nam quoniam est $\Gamma A : AB = EZ^2 : ZH^2$, e contrario [V, 7 coroll.] est $BA : A\Gamma = ZH^2 : ZE^2$. itaque $HZ^2 > ZE^2$ [V, 14]. sit igitur $HZ^2 = EZ^2 + \Theta^2$. itaque conuertendo [V,

---

m. rec. P. 12. τετράγωνος F, corr. m. 1. ἀριθμόν] m. 2 V. Deinde add. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE (τῇ ZE om. V) μήκει b, mg. m. 1 F, m. 2 V. 13. εἰσιν PB. 14. ἄρα] om. P. EH] H e corr. m. 1 b. 15. καί] m. 2 F. 17. EZ] P; HZ BVb, P m. rec.; ZH F. ZH] P, ZE BFVb, P m. rec. Ante ὡς add. ἄρα m. rec. P. 18. οὕτως] om. BVb. ZH] P, EZ BFVb, P m. rec. 19. ZE] P, ZH BFVb, P m. rec. Dein add. ὁ δὲ BA τοῦ $A\Gamma$ μείζων (corr. ex μεῖζον) ἐστί V; μεῖζον (μείζων m. rec. b) δὲ τὸ (ὁ m. rec. b) BA τοῦ $A\Gamma$ b, in ras. F. μεῖζον ἄρα] sustulit rep. in F. ἄρα ἐστί V. τό] m. 2 F. HZ] P, EZ BFVb, P m. rec.; item lin. 20, 22. 20. τῆς] om. P. ZE] P, ZH BFVb, P m. rec. τῷ] supra scr. m. 1 b, postea add. m. 1 V, corr. ex τό F m. 1. 21. EZ] P, HZ BFb, m. rec. P, in ras. V.

τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Θ μήκει· ὥστε ἡ ΖΗ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΗΖ, ΖΕ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΕΖ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νγ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν μηδὲ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως το ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καί ἐστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει

---

1. τετράγωνον] corr. ex τετράγωνος m. 1 b. 2. ΖΗ] P, ΕΖ BFVb, P m. rec.; item lin. 4, 5. Θ] ras. 1 litt. V. 4. ἐστίν] om. BVb. 5. τῆς] corr. ex τῇ Vb. ΖΕ] P, ΖΗ BFVb, P m. rec. συμμέτρου F, corr. m. 2. 6. εἰσι V, comp. Fb. αἱ] m. rec. P. αἱ ΗΖ, ΖΕ] om. FVb; αἱ ΕΖ, ΖΗ supra scr. m. 2 B. 7. ΕΖ] P, ΖΗ BFVb, ΗΖ m. rec. P. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 13. ΑΓ] Α, seq. ras. 1 litt., F. τόν] corr. ex τό m. 2 B. 16. μήτε P. 17. ΒΑ] supra scr. Γ m. 1 b, ΑΒ F et V, sed corr. ἔχειν *V, sed corr.* 18. καί] m. 2 F. 20. οὕτως καί V. σύμμετρος *Theon (BFVb)*, P m. rec. 21. ἄρα ἐστίν FV. τό —

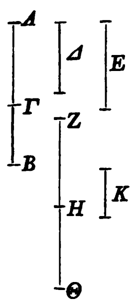
19 coroll.] $\varDelta B : B\Gamma = HZ^2 : \Theta^2$. uerum $\varDelta B : B\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne ZH^2 quidem ad Θ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH, Θ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare ZH^2 excedit ZE^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis. et HZ, ZE rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et minus nomen EZ rectae rationali propositae $\varDelta$ longitudine commensurabilis est.

Ergo EH ex duobus nominibus est quinta [def. alt. 5]; quod erat demonstrandum.

LIII.

Inuenire rectam ex duobus nominibus sextam.

Exponantur duo numeri $\varDelta\Gamma$, ΓB eius modi, ut $\varDelta B$ ad neutrum rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, sit autem etiam alius numerus $\varDelta$ non quadratus neque ad alterutrum $B\varDelta$, $\varDelta\Gamma$ rationem habens, quam numerus quadratus ad



numerum quadratum [prop. XXVIII lemma]; et ponatur recta rationalis E, et fiat

$$\varDelta : \varDelta B = E^2 : ZH^2$$

[prop. VI coroll.]. itaque E^2, ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. et E rationalis est; itaque etiam ZH rationalis est. et quoniam $\varDelta : \varDelta B$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne E^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam nu-

---

ZH] ἡ E τῇ (τῷ ἀπὸ τῆς P) ZH δυνάμει Theon (BFVb), P m. rec. ἐστιν B. 22. ἐπεί] m. 2 B, om. F.

ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΗ. ῥητὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα προς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς

---

7. ἀσύμμετρον F, sed corr. ΘΗ] in ras. V, ΗΘ Fb. Deinde add. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ Theon (BFVb). 8. ἄρα

merus quadratus ad numerum quadratum. itaque E, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. iam rursus fiat $BA:A\Gamma = ZH^2:H\Theta^2$ [prop. VI coroll.]. itaque ZH^2, ΘH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. itaque ΘH^2 rationale est; quare ΘH est rationalis. et quoniam $BA:A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH, $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. quare ZH, $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque $Z\Theta$ ex duobus nominibus est.

iam demonstrandum, eandem sextam esse. nam quoniam est $\Delta:AB = E^2:ZH^2$, et $BA:A\Gamma = ZH^2:H\Theta^2$, ex aequo erit [V, 22] $\Delta:A\Gamma = E^2:H\Theta^2$. uerum $\Delta:A\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne E^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque E, $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. demonstrauimus autem, etiam E, ZH incommensurabiles esse. itaque utraque ZH, $H\Theta$ rectae E longitudine incommensurabilis est. et quoniam est $BA:A\Gamma = ZH^2:H\Theta^2$, erit $ZH^2 > H\Theta^2$ [V, 14]. iam sit $ZH^2 = H\Theta^2 + K^2$. quare conuertendo [V, 19 coroll.] erit $AB:B\Gamma = ZH^2:K^2$. uerum $AB:B\Gamma$

καί Theon (BFVb). *ῥητή — ΘH*] mg. V. *HΘ* P. 9. *BΔ*] *AB'* F. 10. *οὐδέ*] *οὐδ' ἄρα* FVb, *οὐκ ἄρα* B. *τό*] *τά* F. 14. *εἰσιν* B. 18. *ἔστιν* B. 19. *BΔ*] *AB* P. 21. *δέ*] m. 2 F. 23. *οὐδέ*] *οὐδ' ἄρα* Theon (BFVb). *ἄρα*] om. Theon (BFVb). 26. *HZ* F. 27. *ἑκατέρα — E*] *ἡ E ἄρα ἑκατέρα τῶν ZH, HΘ ἐστιν ἀσύμμετρος* V. *ἄρα*] supra scr. F. 28. *οὕτως*] om. b, m. 2 B. 29. Post HΘ add. *μείζων δὲ ὁ AB τοῦ AΓ* V. *μεῖζον*] bis F.

ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ [τῆς] *ΖΗ* ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν *ΗΘ*, *Κ*· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ *ΑΒ* πρὸς *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ *ΖΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Κ*. ὁ δὲ *ΑΒ* πρὸς τὸν *ΒΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ *ΖΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Κ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΗ* τῇ *Κ* μήκει· ἡ *ΖΗ* ἄρα τῆς *ΗΘ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ *ΖΗ*, *ΗΘ* ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ *Ε*.

Ἡ *ΖΘ* ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ *ΑΒ*, *ΒΓ* καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν *ΔΒ* τῇ *ΒΕ*· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ΖΒ* τῇ *ΒΗ*. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ *ΑΓ* παραλληλόγραμμον· λέγω, ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ *ΑΓ*, καὶ ὅτι τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ *ΔΗ*, καὶ ἔτι τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ *ΔΓ*.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν *ΔΒ* τῇ *ΒΖ*, ἡ δὲ *ΒΕ* τῇ *ΒΗ*, ὅλη ἄρα ἡ *ΔΕ* ὅλῃ τῇ *ΖΗ* ἐστιν ἴση. ἀλλ᾽ ἡ μὲν *ΔΕ* ἑκατέρᾳ τῶν *ΑΘ*, *ΚΓ* ἐστιν ἴση, ἡ δὲ *ΖΗ* ἑκατέρᾳ τῶν *ΑΚ*, *ΘΓ* ἐστιν ἴση· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν *ΑΘ*, *ΚΓ* ἑκατέρᾳ τῶν *ΑΚ*, *ΘΓ* ἐστιν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΑΓ* παραλληλόγραμμον· ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΑΓ*.

---

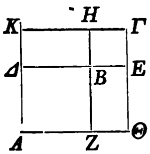
1. *ΖΗ*] *ΖΘ* b. τῆς] om. P. τῆς] om. Pb. 3. τόν *ΒΓ* V. τῆς *ΖΗ* FV. 4. πρὸς τὸν *ΒΓ*] mg. m. 1 P. 6. τῆς *ΖΗ* FV. 7. ἀσύμμετρα P, corr. m. 1. 9. συμ-

rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ne ZH^2 quidem ad K^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH, K longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque ZH^2 excedit $H\Theta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis. et ZH, $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et neutra earum rationali propositae E longitudine commensurabilis est.

Ergo $Z\Theta$ recta ex duobus nominibus est sexta [def. alt. 6]; quod erat demonstrandum.

Lemma.

Sint duo quadrata AB, $B\Gamma$ et ita ponantur, ut ΔB, BE in eadem recta sint. itaque etiam ZB, BH in eadem sunt recta. et expleatur parallelogrammum $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ quadratum esse, et ΔH medium esse proportionale inter AB, $B\Gamma$, et praeterea $\Delta\Gamma$ medium esse proportionale inter $A\Gamma$, ΓB.



nam quoniam $\Delta B = BZ$, $BE = BH$, erit $\Delta E = HZ$. uerum $\Delta E = A\Theta = K\Gamma$, $ZH = AK = \Theta\Gamma$ [I, 34]. quare etiam

$$A\Theta = K\Gamma = AK = \Theta\Gamma.$$

μέτρον F, corr. m. 2. ἑαυτῇ μήκει F. 11. αὐτῶν] τῶν ZH, $H\Theta$ Theon (BFVb). ἐστιν P. ἐγκειμένη F. 12. E] EH b, H add. m. 2 F. 13. ἡ] om. b. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 18. ἐστίν B. 19. ὅτι τὸ $A\Gamma$ V. ἐστιν P. 20. τὸ $A\Gamma$] om. V. ὅτι] ἔτι BF, supra scr. ὅτι m. 2. 21. ἐστιν P. 22. ZB B. 24. Post ἴση del. ἀλλ' ἡ μὲν ΔE ἑκατέρᾳ m. 1 P. HZ BFV. 25. $\Gamma\Theta$ V. ἄρα] om. b. 26. $A\Theta$] A postea add. V. 27. ἐστίν P. ἔστιν PB. 28. ἐστίν P.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλʼ ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ. τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν [ἐστι] τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ· ἴση γάρ [ἐστιν] ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς ΓΗ, ἀλλʼ ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς ΓΗ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς ΓΒ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς ΔΓ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ. τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ· ἃ προέκειτο δεῖξαι.

νδ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

3. τὴν ΒΕ — 5. ΒΓ] postea ins. m. 1 F. 4. οὕτω B. τό] m. 2 F. τὸ ΒΓ] corr. ex τὴν ΒΓ m. 2 B. 5. οὕτω B. 6. ἄρα] om. b. 8. ἐστι] om. P. 10. τήν] om. BFb. ἐστιν] om. P. ἑκατέρᾳ] om. P. 11. τὴν ΚΔ V. 12. τὴν ΓΗ V. τὴν ΚΔ V. 13. τὴν ΓΗ V. 14. τὸ ΓΒ V, seq. ras. 1 litt. ΔΓ] τὸ ΓΔ V. 15. ΔΓ] ΓΔ V. τὸ ΒΓ] ΒΓ

itaque parallelogrammum $\Lambda\Gamma$ aequilaterum est; est autem idem rectangulum. ergo $\Lambda\Gamma$ quadratum est.

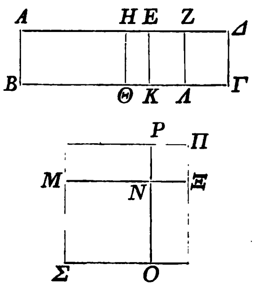
et quoniam est $ZB : BH = \Delta B : BE$, et $ZB : BH = AB : \Delta H$, $\Delta B : BE = \Delta H : B\Gamma$ [VI, 1], erit etiam $AB : \Delta H = \Delta H : B\Gamma$. ergo ΔH medium est proportionale inter AB, $B\Gamma$.

Iam dico, $\Delta\Gamma$ etiam medium proportionale esse inter $A\Gamma$, ΓB.

nam quoniam est $A\Delta : \Delta K = KH : H\Gamma$ (nam utraque utrique aequalis est), et componendo [V, 18] $AK : K\Delta = K\Gamma : \Gamma H$, est autem $AK : K\Delta = A\Gamma : \Gamma\Delta$, $K\Gamma : \Gamma H = \Delta\Gamma : \Gamma B$, erit etiam $A\Gamma : \Delta\Gamma = \Delta\Gamma : B\Gamma$. ergo $\Delta\Gamma$ medium est proportionale inter $A\Gamma$, ΓB; quae propositum erat demonstrare.

LIV.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus prima comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est ex duobus nominibus, quae uocatur.



Spatium enim $A\Gamma$ recta rationali AB et recta ex duobus nominibus prima $A\Delta$ comprehendatur. dico, rectam spatio $A\Gamma$ aequalem quadratam irrationalem esse ex duobus nominibus, quae uocatur.

B, ΓB Fb. 16. ἅ] ὅπερ Theon (BFVb). Post δεῖξαι add. ο>:≻— P. 18. τῆς] m. 2 B. 22. χωρίον — 25. ὀνομάτων] mg. m. 1 F. 22. $A\Gamma$] $AB\Gamma\Delta$ Theon (BFVb). 23. AB] $A\Delta$ F.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. φανερὸν δή, ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω δὴ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Ε, Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ· καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς ΕΛ, τὸ ΕΛ πρὸς ΚΗ· τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ

2. Ε] e corr. m. rec. P. 3. δή] corr. ex δέ B. 4. εἴσιν P. ἀσύμμετροι F, sed corr. 5. ἀσυμμέτρου b, sed corr.; in F supra add. ἀ- m. 2. καί] om. F. ΕΑ F. 7. δή] δέ V. 8. ἀσυμμέτρου b, sed corr. 9. τετάρτῳ] Δ˜ b. τοῦ] τῶι B. τῆς] e corr. V. 12. σύμμετρον P. διέλη Vb, διέλῃι corr. in διελεῖ F, διελεῖ B. Dein add. μήκει V. 13. ὑπὸ τῶν FV. ΗΕ] ΗΘ P. 14. ΑΗ] Η e corr. m. 1 V.

nam quoniam $A\Delta$ ex duobus nominibus prima est, in E in nomina diuidatur, et maius nomen sit AE. manifestum igitur, AE, $E\Delta$ rationales esse potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedere $E\Delta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis, et AE rationali propositae AB longitudine commensurabilem esse [def. alt. 1]. iam $E\Delta$ in Z puncto in duas partes aequales secetur. et quoniam AE^2 excedit $E\Delta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis, si quartae parti quadrati minoris, hoc est quadrato EZ^2, aequale maiori AE adplicatur parallelogrammum figura quadrata deficiens, eam in partes commensurabiles diuidit [prop. XVII]. adplicetur igitur rectae AE quadrato EZ^2 aequale $AH \times HE$. itaque AH, EH longitudine commensurabiles sunt. et ab H, E, Z alterutri AB, $\Gamma\Delta$ parallelae ducantur $H\Theta$, EK, $Z\Lambda$. et parallelogrammo $A\Theta$ aequale quadratum ΣN construatur, et $N\Pi = HK$ [II, 14], et ita ponantur, ut MN, $N\Xi$ in eadem recta sint; quare etiam PN, NO in eadem sunt recta. et parallelogrammum $\Sigma\Pi$ expleatur; itaque $\Sigma\Pi$ quadratum est [u. lemma]. et quoniam est $AH \times HE = EZ^2$, erit $AH : EZ = ZE : EH$ [VI, 17]. quare etiam

$$A\Theta : E\Lambda = E\Lambda : KH \text{ [VI, 1]}.$$

EH] HE in ras. V. 15. H] m. 2 F. AB] A eras. F. $\Gamma\Delta$] in ras. V, $B\Delta$ F, $\Delta\Gamma$ B. 16. EK] E postea ins. m. 1 F. $Z\Lambda$] mut. in ΛZ V, ΛZ BFb. παραλληλόγραμμον P, corr. m. 1. 17. ΣN] Σ corr. ex E BFb. 18. κείσθωσαν V. MN] corr. ex N m. 1 F. 19. ἐστίν B. NP P. 20. $\Sigma\Pi$] corr. ex $E\Pi$ B, item lin. 21. 21. τό] τῷ V. AHE b, et corr. in AH, EH m. 2 V, AH F, et B, corr. m. 2. 22. τῷ] τό V. 23. πρὸς τήν V. ZE] EZ P. EH] τὴν H, ante H ras. 1 litt. V. 24. πρὸς τό, seq. ras. 1 litt., V. $E\Lambda$] E eras. V. τὸ KH V. ἄρα] postea add. m. 1 P.

τῷ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον τῷ ΝΠ· τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΡ· ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἡ ΜΞ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσιν. καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ, ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καί ἐστι σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστι σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ

---

1. *ΣΝ*] (bis) corr. ex *ΕΝ* B, item lin. 3, 5. 2. *ΕΛ*] corr. ex *Λ* m. 1 F. *ἔστιν* PB. 3. *ἐστίν* P. 4. *τό*] corr. ex *τῷ* m. 1 P. *ΜΡ τῷ ΕΛ* Theon (BFVb). *ὥστε καὶ τῷ*] *ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΟΞ* (corr. ex *ΞΟ* V) *ἴσον ἐστὶ* (*ἐστίν* B) *τὸ δὲ ΕΛ* (*ΕΔ* F) *τῷ ΖΓ, ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ* Theon (BFVb). *τῷ*] corr. ex *τό* m. 1 P. *ἐστίν*] postea ins. m. 1 F. 5. *ΕΝ, ΠΝ* F. 6. *τουτέστιν* P. 9. *ΑΝ* F, corr. m. 1. *ΗΕ*] corr. ex *ΕΗ* m. 2 V, *Ε″Η′* F. 10. *ΕΛ ἑκατέρων* F. 11. *σύμμετρος* — 12. *ΑΒ*] (prius) mg. m. 1 F. 11. *καί*] *μήκει· καί* V, B m. 2. *αἱ*] *ἡ* E F, in ras. B. *ΕΗ* P. 12. *εἰσι* V, comp. Fb. *ἐστιν* B. 13. *ἐστίν* PB. 14. *ἐστίν*] *ἐστὶ καί* V.

itaque $E\varDelta$ medium est proportionale inter ΣN, $N\Pi$. uerum etiam MP inter eadem ΣN, $N\Pi$ medium est proportionale [u. lemma]. quare $E\varDelta = MP$. itaque etiam $E\varDelta = O\Xi$ [I, 43]. uerum etiam $A\Theta + HK = \Sigma N + N\Pi$. quare totum[1]) $A\Gamma = \Sigma\Pi = M\Xi^2$. ergo $M\Xi$ quadrata spatio $A\Gamma$ aequalis est.

dico, $M\Xi$ ex duobus nominibus esse. nam quoniam AH rectae HE commensurabilis est, AE utrique rectae AH, HE commensurabilis est [prop. XV]. supposuimus autem, etiam AE, AB commensurabiles esse. quare etiam AH, HE rectae AB commensurabiles sunt [prop. XII]. et AB rationalis est. itaque etiam utraque AH, HE rationalis est. quare etiam $A\Theta$, HK rationalia sunt [prop. XIX], et $A\Theta$, HK commensurabilia. uerum $A\Theta = \Sigma N$, $HK = N\Pi$. itaque etiam ΣN, $N\Pi$, hoc est MN^2, $N\Xi^2$, rationalia sunt et commensurabilia. et quoniam AE, $E\varDelta$ longitudine incommensurabiles sunt, et AE, AH commensurabiles, et $\varDelta E$, EZ commensurabiles, AH et EZ incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare etiam $A\Theta$ et $E\varDelta$ incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. uerum $A\Theta = \Sigma N$, $E\varDelta = MP$. quare etiam ΣN, MP incommensurabilia sunt. est autem $\Sigma N : MP = ON : NP$ [VI, 1]. itaque ON, NP incommensurabiles sunt

1) Nam $E\varDelta = Z\Gamma$.

15. ΣN] corr. ex EN B, item lin. 16. 15. ἐστιν ἴσον V. ἐστί PBb, comp. F. 16. τά] τό F. $N\Pi$ ἄρα] τῷ $N\Pi$ F. 17. ἀσύμμετρα B. 18. ἀλλά Bb. 19. AH] corr. ex AB V. EZ] EZ ἐστι V. 20. καί] ἐστιν V. Post EZ add. μήκει Vb, m. 2 B. 21. ἐστιν] om. BFb. 22. ΣΝ] $N\Sigma'$ F.

πρὸς ΜΡ, ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. καί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νε'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἡ ΕΔ σύμμετρόν ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. καὶ

---

1. τὸ ΜΡ V. οὕτως ἡ V. τήν] om. BFb. ΜΡ F. ἐστιν ἄρα F. 2. ΡΝ P. ΝΜ P. 4. τῆς] (prius) om. Fb, m. 2 B. ΝΞ] ΜΞ F. 5. εἴσιν B. 6. μονονον P. 7. ἐκ] ἢ ἐκ Pb. 12. ἐκ] ἡ ἐκ b. 14. Post γάρ del. τό B. 18. γάρ] om. Fb, m. 2 B. 20. ΑΕ] (alt.) ΕΑ P, corr. in Α

[prop. XI]. uerum $ON = MN$, $NP = N\Xi$. quare MN, $N\Xi$ incommensurabiles sunt. et MN^2, $N\Xi^2$ commensurabilia sunt, et utrumque rationale. MN, $N\Xi$ igitur rationales sunt potentia tantum commensurabiles.

Ergo $M\Xi$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI], et $M\Xi^2 = A\Gamma$; quod erat demonstrandum.

LV.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus secunda comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est ex duobus mediis prima, quae uocatur.

Spatium enim $AB\Gamma\Delta$ rationali AB et recta ex duobus nominibus secunda $A\Delta$ comprehendatur. dico, rectam spatio $A\Gamma$ aequalem quadratam ex duobus mediis primam esse.

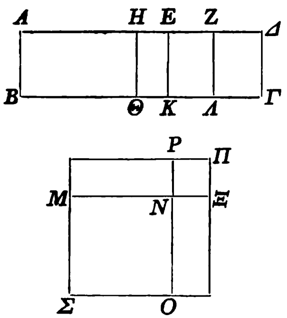
nam quoniam $A\Delta$ ex duobus nominibus secunda est, in E in nomina diuidatur ita, ut AE maius nomen sit. itaque AE, $E\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedit $E\Delta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis, et minus nomen $E\Delta$ rectae AB longitudine commensurabile est [def. alt. 2]. iam $E\Delta$ in Z in duas partes aequales secetur, et quadrato EZ^2 aequale rectae AE adplicetur $AH \times HE$ figura quadrata deficiens. itaque AH, HE longitudine commensurabiles sunt [prop. XVII]. et per H, E, Z rectis AB, $\Gamma\Delta$ parallelae ducantur $H\Theta$, EK, $Z\Lambda$, et paral-

m. rec. εἰσιν PB. 21. τῆς $E\Delta$] mg. m. 1 P. 22. ἔλασσον P, comp. F. 23. AB] A ins. m. 1 F. 24. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 25. τό] τῷ V. 26. AH, HE V e corr.

διὰ τῶν Η, Ε, Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ, ΓΔ αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι την ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΣΝ, ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ. δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ. ἀλλὰ ἡ ΑΕ ἀσύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει· καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ. αἱ ΒΑ, ΑΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ. ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἐστίν. καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσίν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ

---

1. ΓΔ] ΒΓ, ΓΔ P, corr. m. 1; ΔΓ Bb. 2. ΖΛ] mut. in ΛΖ V, ΛΖ Fb. 3. Post τετράγωνον del. τὸ ΝΠ m. 1 P. ΕΝ B, sed corr. 5. ΝΞ] mut. in ΝΖ V. ἐστί] om. P, ἐστίν B. 8. ΝΠ] ΠΝ F et in ras. V. 9. ΜΞ] ΜΝ, ΝΞ corr. ex ΜΝΞ V; mg. m. 1 γρ. ΜΝ, ΝΞ b. δέ V. 10. μέσον F, corr. m. 1. ἐπεὶ γάρ F. 12. ἄρα] ἄρα καί V, ἄρα ἐστίν F. Post ΑΒ add. μήκει V, m. 2 B. ἐπεί] om. P. 13. ΕΗ] ΗΕ F. ἔστιν B. 14. ἀλλά — 15. καί] καί ἐστι (ἐστιν B) ῥητὴ ἡ ΑΕ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ (ΑΕ F), ΗΕ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ, ΗΕ, καί (om. B) Theon (BFVb). 15. ἄρα] m. 2 F. σύμμετροι BF, sed corr. εἰσιν PB. 16. *Post ΑΒ add. μήκει m. 2 B.* ΒΑ] om. P. εἰσιν B. 18. *ἐστί PV, comp. Fb.* 19. εἰσί V, comp. Fb. Ante ἡ add.



lelogrammo $A\Theta$ aequale construatur quadratum ΣN, parallelogrammo HK autem $N\Pi$, et ponantur ita, ut MN, $N\Xi$ in eadem recta sint; itaque etiam PN, NO in eadem sunt recta. expleatur quadratum $\Sigma\Pi$. tum ex iis, quae antea demonstrata sunt [prop. LIII lemma], adparet, MP medium esse proportionale inter ΣN, $N\Pi$ et $= E\Lambda$ [p. 162, 1], et esse $M\Xi^2 = A\Gamma$ [p. 162, 5]. iam demonstrandum est, $M\Xi$ ex duabus mediis primam esse. quoniam AE, $E\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt, et $E\Delta$, AB commensurabiles, AE, AB incommensurabiles erunt [prop. XIII]. et quoniam AH, EH commensurabiles sunt, etiam AE utrique AH, HE commensurabilis est [prop. XV]. uerum AE, AB longitudine incommensurabiles sunt. quare etiam AH, HE rectae AB incommensurabiles sunt [prop. XIII]. itaque BA et AH, HE rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare utrumque $A\Theta$, HK medium est [prop. XXI]. quare etiam utrumque ΣN, $N\Pi$ medium est. itaque etiam MN, $N\Xi$ mediae sunt. et quoniam AH, HE longitudine commensurabiles sunt, etiam $A\Theta$, HK, hoc est ΣN, $N\Pi$ siue MN^2, $N\Xi^2$ commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam AE, $E\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt, et AE, AH commensurabiles, et $E\Delta$, EZ com-

---

ἐστιν BVb, m. 2 F. 20. *καὶ τὸ* $A\Theta$] eras. V. τῷ] τῇ P. *MK F, corr. m. 2.*

τῷ ἀπο τῆς ΝΞ [ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ]. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΖ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ, τουτέστιν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τουτέστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ, ΝΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δή, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ σύμμετρος, σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ. καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· ῥητὸν ἄρα τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ· τὸ δὲ ΜΡ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ. ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ἄρα ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νϛ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζόν ἐστι τὸ

1. ὥστε — 2. ΝΞ] om. P. ὥστε καί F, sed corr. 3. ἀλλά V. 4. σύμμετρος] om. FVb. ἀσύμμετρος] corr. ex σύμμετρος m. 2 F. 5. ἀσύμμετρος F, corr. m. 2. ἐστι BV, comp. Fb. ΣΝ] corr. ex ΕΝ B. 6. ΝΡ] in ras. V. 7. ἐστιν P. 8. δυνάμει μόνον V. αἱ — 9. σύμμετροι] mg. m. 2 V. 9. εἰσίν B. 10. ΔΕ] in ras. V. 11. ΑΒ] corr.

mensurabiles, AH et EZ incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare $A\Theta$, EA, hoc est ΣN, MP, incommensurabilia sunt, siue ON, NP, hoc est MN, $N\Xi$, longitudine incommensurabiles [VI, 1; prop. XI]. demonstrauimus autem, MN, $N\Xi$ et medias esse et potentia commensurabiles. itaque MN, $N\Xi$ mediae sunt potentia tantum commensurabiles. iam dico, easdem spatium rationale comprehendere. nam quoniam supposuimus, $\varDelta E$ utrique AB, EZ commensurabilem esse, etiam EZ, EK commensurabiles sunt. et utraque rationalis est. quare EA, hoc est MP, rationale est [prop. XIX]. uerum $MP = MN \times N\Xi$. sin duae mediae potentia tantum commensurabiles componuntur spatium rationale comprehendentes, tota irrationalis est, uocatur autem ex duabus mediis prima [prop. XXXVII].

Ergo $M\Xi$ ex duabus mediis prima est; quod erat demonstrandum.

LVI.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus tertia comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est ex duabus mediis secunda, quae uocatur.

Spatium enim $AB\Gamma\varDelta$ comprehendatur rationali AB et recta ex duobus nominibus tertia $A\varDelta$ in nomina in E diuisa, quorum maius est AE. dico, rectam

---

ex EB m. rec. F. EZ] in ras. V. σύμμετρος] om. F. 12. ἄρα ἐστί P. EZ] mut. in ZE V, ZE P. 13. τουτέστιν P. 14. MN, $N\Xi$ V. μόνον] om. BFV. 15. συντεθῶσιν PB. ἡ] m. 2 F. 16. ἐστι V, comp. Fb. 17. $M\Xi$] MHZ, del. Z, F. ἐστί] m. 2 F. 24. ῥητῆς] supra scr. F. 25. τρίτης] supra scr. F. 26. ὧν] ὧν τό P. ἔστω BFb.

ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ ΑΔ, αἱ ΑΕ, ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΔ σύμμετρός [ἐστι] τῇ ΑΒ μήκει. ὁμοίως δὴ τοῖς προδεδειγμένοις δείξομεν, ὅτι ἡ ΜΞ ἐστιν ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ ΜΝ, ΝΞ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥστε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

[Καὶ] ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ· καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ.

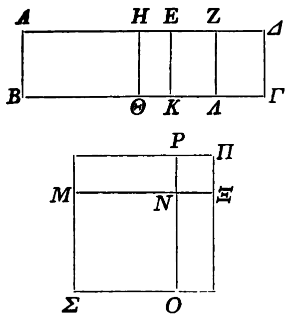
Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. *ἡ*] supra scr. m. 1 b. 3. *κατασκευάσθω* Vb. *γάρ*] *δέ* V. 5. *εἰσιν* P. Post *ΑΕ* del. *ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσιν* m. 1 P. 7. *ἐστι*] om. P. 8. *τοῖς πρότερον δεδειγμένοις* Theon (BFVb). *ἡ*] m. rec. P. 9. *ἡ*] postea ins. F. *καὶ ὅτι αἱ* BFV. 10. *εἰσίν* B. *ΜΞ*] *ΜΖ* FV. 11. *ἐστί* BV, comp. Fb. 13. *καί*] m. 2 BF, om. Vb. *ἐπεὶ οὖν* V. 15. *ΕΖ*] *ΖΕ* P. *ΕΚ*] *ΕΗ* P. 16. *εἰσιν* PB. 17. *ἐστί*] om. BFVb. *τουτέστιν* P. 18. *ΜΝ, ΝΞ* b. *μέσον* — 19. *ΜΝΞ*] mg. m. 2 F. 20. *ΜΞ*] *ΜΝ*, add. *Ξ* m. 2 B; *ΜΝΞ* FVb. *ἄρα*] supra scr. m. 1 F. *ἐστί*] om. P. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BFVb.

spatio $A\Gamma$ aequalem quadratam irrationalem esse ex duabus mediis secundam, quae uocatur.

Comparentur enim eadem, quae antea. et quoniam $A\Delta$ ex duobus nominibus tertia est, AE, $E\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedit $E\Delta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis, et neutra rectarum AE, $E\Delta$ rectae AB longitudine commensurabilis est [def. alt. 3]. iam eodem modo quo antea demonstrabimus, esse



$$M\Xi^2 = A\Gamma$$

[cfr. p. 162, 5], et MN, $N\Xi$ medias esse potentia tantum commensurabiles [cfr. p. 166, 10 sq.]. quare $M\Xi$ ex duabus mediis est.

iam demonstrandum est, eandem secundam esse. quoniam ΔE, AB, hoc est ΔE, EK, longitudine incommensurabiles sunt, et ΔE, EZ commensurabiles, EZ et EK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et rationales sunt; itaque ZE, EK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare $E\Lambda$, hoc est MP, medium est [prop. XXI]. et rectis MN, $N\Xi$ comprehenditur. itaque $MN \times N\Xi$ medium est.

Ergo $M\Xi$ ex duabus mediis secunda est [prop. XXXVIII]; quod erat demonstrandum.

νζ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ *ΑΓ* περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς *ΑΒ* καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς *ΑΔ* διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ *Ε*, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ *ΑΕ*· λέγω, ὅτι ἡ τὸ *ΑΓ* χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ *ΑΔ* ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ *ΑΕ*, *ΕΔ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ *ΑΕ* τῆς *ΕΔ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ *ΑΕ* τῇ *ΑΒ* σύμμετρός [ἐστι] μήκει. τετμήσθω ἡ *ΔΕ* δίχα κατὰ τὸ *Ζ*, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΕΖ* ἴσον παρὰ τὴν *ΑΕ* παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ *ΑΗ*, *ΗΕ*· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΗ* τῇ *ΗΕ* μήκει. ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ *ΑΒ* αἱ *ΗΘ*, *ΕΚ*, *ΖΛ*, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δή, ὅτι ἡ τὸ *ΑΓ* χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ *ΜΞ*. δεικτέον δή, ὅτι ἡ *ΜΞ* ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *ΑΗ* τῇ *ΕΗ* μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ *ΑΘ* τῷ *ΗΚ*, τουτέστι τὸ *ΣΝ* τῷ *ΝΠ*· αἱ *ΜΝ*, *ΝΞ* ἄρα δυνάμει εἰσὶν

---

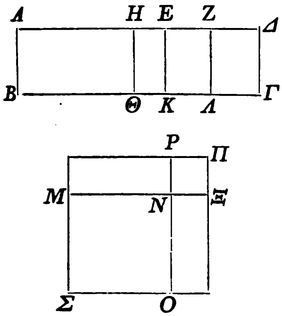
2. περιέχεται P. 4. μείζω V, sed corr. 8. ἡ] om. Fb. *ΑΕ* P. χωρίον ἡ Fb. 10. ἐστίν P. 11. εἰσιν P. 12. τῆς] τῇ b. τῷ] corr. ex τό V. συμμέτρου, ἀ- add. m. 2, BFb. 13. ἐστι] om. P. 15. *ΑΕ*] supra *Α* scr. *Δ* b, E in ras. V. 16. ὑπὸ τῶν V. *ΑΗ*] corr. ex *ΑΕ* m. 1 F. 17. *ΕΗ* V. 18. *ΖΛ*] in ras., seq. ras. 3 litt. V, Z in ras. m. 1 B. λοιπά] supra scr. V. τά] om. FV. αὐτά] om. F. 21. σύμμετρος F, corr. m. 2. ἐστιν] om. B. 22. τουτέστιτεστι P, *corr. m. 1.* 23. τῷ] corr. ex τό FV. ἄρα] om. b. εἰσὶ σύμμετροι *V, corr.* m. 2.

LVII.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quarta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est maior, quae uocatur.

Spatium enim $A\Gamma$ rationali AB comprehendatur et $A\Delta$ recta ex duobus nominibus quarta in E in nomina diuisa, quorum maius sit AE. dico, rectam spatio $A\Gamma$ aequalem quadratam irrationalem esse maiorem, quae uocatur.

nam quoniam $A\Delta$ ex duobus nominibus quarta est, AE, $E\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AE^2 excedit $E\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis, et AE, AB longitudine commensurabiles sunt [deff. alt. 4]. secetur ΔE in Z in duas partes aequales, et quadrato EZ^2 aequale rectae AE adplicetur parallelogrammum



$$AH \times HE.$$

itaque AH, HE longitudine incommensurabiles sunt [prop. XVIII]. rectae AB parallelae ducantur $H\Theta$, EK, $Z\Lambda$, et reliqua eodem modo, quo antea [p. 166, 1 sq.], fiant. manifestum igitur est, esse $M\Xi^2 = A\Gamma$. iam demonstrandum, $M\Xi$ irrationalem esse maiorem, quae uocatur. quoniam AH, EH longitudine incommensurabiles sunt, etiam $A\Theta$, HK, hoc est ΣN, $N\Pi$, incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque MN, $N\Xi$ potentia incommensurabiles sunt. et quoniam AE, AB longitudine commensurabiles sunt, AK rationale est [prop.

ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ· καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός [ἐστιν] ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΕΖ, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. αἱ ΕΚ, ΕΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΛΕ, τουτέστι τὸ ΜΡ. καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ῥητὸν τὸ [συγκείμενον] ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, καί εἰσιν ἀσύμμετροι αἱ ΜΝ, ΝΞ δυνάμει. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μείζων.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νη'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω [δή], ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον

---

1. ΕΑ P. 2. ἐστι] ἐστιν P, dein del. ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ m. 1. τό] e corr. m. 1 V. 3. ΜΝ] ΝΜ P. ἐστί] om. BFVb. καί] om. b. 5. ἐστιν] om. P. τουτέστιν P. ἀλλ' F. 6. ἐστιν P. τῇ] τῆς P. 7. εἰσιν P. 8. τουτέστιν b. τό] *corr. ex* τῷ *m.* 1 F. 9. μέσον — 10. ΝΞ] mg. m. 1 P. 10.

XIX]. et $\Delta K = MN^2 + N\Xi^2$. quare etiam $MN^2 + N\Xi^2$ rationale est. et quoniam ΔE, AB, hoc est ΔE, EK, longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII], et ΔE, EZ commensurabiles, EZ, EK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. itaque EK, EZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare ΛE, hoc est MP, medium est [prop. XXI]. et rectis MN, $N\Xi$ comprehenditur. itaque $MN \times N\Xi$ medium est. et $MN^2 + N\Xi^2$ rationale est, et MN, $N\Xi$ potentia incommensurabiles sunt. sin duae rectae potentia incommensurabiles componuntur efficientes summam quadratorum suorum rationalem, rectangulum autem medium, tota irrationalis est, uocatur autem maior [prop. XXXIX].

Ergo $M\Xi$ irrationalis est maior, quae uocatur, et $M\Xi^2 = A\Gamma$; quod erat demonstrandum.

LVIII.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est spatio rationali et medio aequalis quadrata, quae uocatur.

Spatium enim $A\Gamma$ comprehendatur rationali AB et $A\Delta$ recta ex duobus nominibus quinta in E in nomina diuisa, ita ut AE maius nomen sit. dico, rectam spatio $A\Gamma$ aequalem quadratam irrationalem esse

---

ὑπό] συγκείμενον ἐκ V. συγκείμενον] om. P. 11. ἐκ τῶν] supra scr. F. καί ἐστιν ἀσύμμετρος ἡ MN τῇ $N\Xi$ Theon (BFVb). 13. συντεθῶσιν PB. 14. δέ comp. F. 15. ἐστι BV, comp. Fb. 19. καὶ τῆς] bis b. 26. δή] om. P. ἡ] supra scr. m. 1 P.

δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

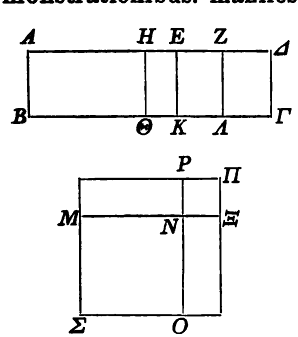
Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις· φανερὸν δή, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. δεικτέον δή, ὅτι ἡ ΜΞ ἐστιν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καί [ἐστιν] ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΕΔ, σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστιν ἀσύμμετρος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστιν ἀσύμμετρος μήκει [αἱ ΒΑ, ΑΕ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι]· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρός ἐστιν, καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ῥητὴ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΝΞ· αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν.

---

3. κατασκευάσθω V, sed corr. γάρ] οὖν V. τοῖς προδεδειγμένοις Theon (BFVb). 5. δέ F. 7. ΗΕ] corr. ex ΕΗ V. ἐστίν PB. 8. τῆς ΝΞ] τῶν ΝΞ P. 9. σύμμετροι V, corr. m. 2. ΑΔ] Δ e corr. V. 10. ἐστιν] om. P. 12. ἀλλ᾽ F. 13. ΒΑ] mut. in ΑΒ m. 2 V, ΑΒ F. 14. εἰσιν B. 16. ἀσύμμετρος B, corr. m. 2. 17. ἀλλ᾽ F. ΔΕ] corr. ex ΒΓ, ut uidetur, V. ἐστι PBV, comp. Fb. 18. Ante σύμμετρος ras. 1 litt. V. καὶ ῥητή] ῥητὴ δέ BFVb. 19. Post ΕΚ add. ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΕΖ V. ΕΛ] supra add. Δ m. 1 b. τουτέστιν P. τουτέστιν P. 20. ὑπὸ τῶν FV. ΜΝ, ΝΞ B. 21. εἰσιν PB. 22. δέ F.

spatio rationali et medio aequalem quadratam, quae uocatur.

comparentur enim eadem, quae in superioribus demonstrationibus. manifestum igitur est, esse $M\Xi^2 = A\Gamma$ [p. 162, 1 sq.]. iam demonstrandum est, $M\Xi$ esse rectam spatio rationali et medio aequalem quadratam. nam quoniam AH, HE incommensurabiles sunt [prop. XVIII], $A\Theta$, ΘE, hoc est MN^2, $N\Xi^2$, incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque MN, $N\Xi$ potentia incommensurabiles sunt. et quoniam $A\Delta$ ex duobus nominibus est quinta, et minor pars eius est $E\Delta$, $E\Delta$ et AB longitudine commensurabiles sunt [deff. alt. 5]. uetum AE, $E\Delta$ incommensurabiles sunt. quare etiam AB, AE longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII].[1]) itaque AK, hoc est $MN^2 + N\Xi^2$, medium est [prop. XXI]. et quoniam ΔE, AB, hoc est ΔE, EK, longitudine commensurabiles sunt, et ΔE, EZ commensurabiles, etiam EZ, EK commensurabiles sunt [prop. XII]. et EK rationalis est. itaque etiam $E\Lambda$, hoc est MP siue $MN \times N\Xi$, rationale est [prop. XIX]. itaque MN, $N\Xi$ potentia incommensurabiles sunt summam quadratorum suorum mediam efficientes, rectangulum autem rationale.



1) Cum lin. 13 ἄρα, quod edd. post AE habent, in codd. omittatur, malui delere αἱ BA — lin. 14 σύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

νθ΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης τῆς ΑΔ διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Κατεσκευάσθω [γὰρ] τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. φανερὸν δή, ὅτι [ἡ] τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει, αἱ ΕΑ, ΑΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ· αἱ ΖΕ, ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν

1. ἐστίν PB. 6. ἡ] postea ins. F. μέσας P, corr. m. 1. 7. ῥητῆς] om. F. 10. ἡ — δυναμένη] mg. m. 1 P. ἡ] (alt.) ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη Vb, e corr. F. 11. ἐστίν] del. F, om. Vb. 12. κατασκευάσθω V. γάρ] om. P. 13. ἡ] om. PF. 15. ΕΑ] ΑΕ FVb. ΕΑ] ΑΕ΄ F, in ras. V. 16. εἰσιν B. 17. ἐστίν P. ''ἀπὸ τῶν 'ἐκ τῶν F. 18. ΝΞ] mut. in ΞΝ V. 19. Post ΑΒ add. τουτέστι τῇ ΕΚ V. ἐστίν B. ΖΕ] ΕΖ P. 20. αἱ] καὶ αἱ BFb. εἰσιν P. 21. ΜΡ] corr. ex ΜΕ m. rec. b. τουτέστιν P. 22. ἡ] ἐστιν ἡ FV. 23. ἀσύμμετρος F.

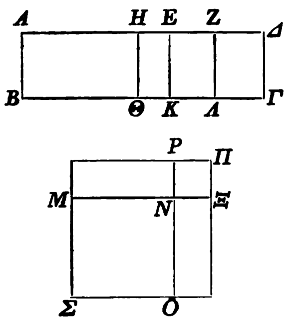
Ergo $M\Xi$ recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est [prop. XL], et $M\Xi^2 = A\Gamma$; quod erat demonstrandum.

LIX.

Si spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus sexta comprehenditur, recta spatio quadrata aequalis irrationalis est duobus spatiis mediis aequalis quadrata, quae uocatur.

Spatium enim $AB\Gamma\Delta$ comprehendatur recta rationali AB et recta ex duobus nominibus sexta $A\Delta$ in E in nomina diuisa, ita ut maius nomen sit AE. dico, rectam spatio $A\Gamma$ aequalem quadratam rectam esse duobus spatiis mediis aequalem quadratam.

comparentur eadem, quae in superioribus demonstrationibus. manifestum est igitur, esse $M\Xi^2 = A\Gamma$,



et MN, $N\Xi$ potentia incommensurabiles esse [p. 176, 6 sq.]. et quoniam EA, AB longitudine incommensurabiles sunt [deff. alt. 6], EA et AB rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque AK, hoc est $MN^2 + N\Xi^2$, medium est [prop. XXI]. rursus quoniam $E\Delta$, AB longitudine incommensurabiles sunt [deff. alt. 6], ZE et EK incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare ZE, EK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque $E\Lambda$, hoc est MP siue $MN \times N\Xi$, medium est [prop. XXI]. et quoniam AE, EZ incommensurabiles sunt, etiam AK, $E\Lambda$

ΑΚ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπο τῶν *ΜΝ*, *ΝΞ*, τὸ δὲ *ΕΛ* ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν *ΜΝΞ*· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΜΝΞ* τῷ ὑπὸ τῶν *ΜΝΞ*. καί ἐστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ *ΜΝ*, *ΝΞ* δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι.

Ἡ *ΜΞ* ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ *ΑΓ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Λῆμμα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ *ΑΒ* καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ *Γ*, καὶ ἔστω μείζων ἡ *ΑΓ*· λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*.

Τετμήσθω γὰρ ἡ *ΑΒ* δίχα κατὰ τὸ *Δ*. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ *Δ*, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ *Γ*, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* μετὰ τοῦ ἀπὸ *ΓΔ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ *ΑΔ*· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ *ΑΔ*· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ *ΑΔ*. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* διπλάσιά [ἐστι] τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΓ*· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.]

ξ΄.

Το ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν

---

2. ἐστι] m. 2 F. τῶν] om. BFb. 3. *ΜΝ*, *ΝΞ* V. τῷ] τό FV. 4. *ΜΝ*, *ΝΞ* m. 2 V. ἐστι P. μέσον] μέν V. 6. δυνάμει V. 8. λῆμμα] m. 2 P. 10. ἴσων V, sed corr.

incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. uerum $AK = MN^2 + N\Xi^2$, $E\Lambda = MN \times N\Xi$. itaque $MN^2 + N\Xi^2$ et $MN \times N\Xi$ incommensurabilia sunt. et utrumque medium est, et MN, $N\Xi$ potentia incommensurabiles sunt.

Ergo $M\Xi$ recta est duobus spatiis mediis aequalis quadrata [prop. XLI], et $M\Xi^2 = \Lambda\Gamma$; quod erat demonstrandum.

[Lemma.

Si recta linea in partes inaequales secatur, quadrata partium inaequalium maiora sunt duplo rectangulo partibus inaequalibus comprehenso.



Sit recta AB et in Γ in partes inaequales secetur, et maior sit $A\Gamma$. dico, esse

$$A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > 2\,A\Gamma \times \Gamma B.$$

nam AB in Δ in duas partes aequales secetur. iam quoniam recta linea in Δ in partes aequales secta est, in Γ autem in inaequales, erit $A\Gamma \times \Gamma B + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2$ [II, 5]. quare $A\Gamma \times \Gamma B < A\Delta^2$. itaque $2\,A\Gamma \times \Gamma B < 2\,A\Delta^2$. est autem $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 = 2(A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2)$ [II, 9]. ergo $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > 2\,A\Gamma \times \Gamma B$; quod erat demonstrandum].[1]

LX.

Quadratum rectae ex duobus nominibus rectae ra-

1) Cum Euclides iam prop. XLIV p. 128, 17 hoc lemmate tacite usus sit, parum credibile est, id ab eo ipso hic demum additum esse. quare puto, lemma ab interpolatore adiectum esse, quem fugerit, id iam antea usurpatum esse. facile adparet res ipsa ex II, 7.

εἰσι V. *ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων* V. 12. *ἔστω γάρ* F. 13. *μεῖζον τὸ ΑΓ* P. 16. *Δ*] corr. ex *B* F. 17. *γραμμὴ ἡ AB* V. 19. *ἀπὸ τῆς* Vb. *ΓΔ*] in ras. V, *ΔΓ* P. *τῆς ΑΔ* V. 20. *ἔλασσον* P, comp. Fb. *τῆς ΑΔ* V. 22. τῆς ΑΔ V. *ἐστι*] *om. P.* 24. *τῶν*] om. P. 25. *νθ'*, corr. m. 2, F.

παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.

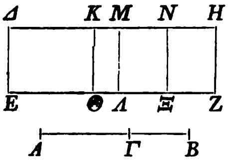
Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΖ. τετμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ [ἑκατέρᾳ τῶν ΜΛ, ΗΖ]. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΜΞ, ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ [σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ]. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΓΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἐστι καὶ ἀσύμ-

5. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. ΑΒ] Α e corr. B. 9. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 10. τό] mut. in τῷ m. 1 F. ΔΘ] Θ e corr. V. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 11. ἐστί] m. 2 F. 12. δίχα] m. 2 V. 13. ΝΞ] Ν eras. F, Ξ b. ἑκατέρᾳ — ΗΖ] om. P. 14. Post ἄρα del. τῶν ΑΗ V. ΝΖ] corr. ex ΝΞ

tionali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus primam.

Sit AB recta ex duobus nominibus in Γ in nomina diuisa, ita ut maius nomen sit $A\Gamma$, et ponatur rationalis ΔE, et quadrato AB^2 aequale rectae ΔE adplicetur ΔEZH latitudinem efficiens ΔH. dico, ΔH rectam esse ex duobus nominibus primam.



nam rectae ΔE adplicetur $\Delta\Theta = A\Gamma^2$ et $K\Lambda = B\Gamma^2$. itaque reliquum [II, 4] $2\,A\Gamma \times \Gamma B = MZ$. iam MH in N in duas partes aequales secetur, et $N\Xi$ parallela ducatur. itaque $M\Xi = NZ = A\Gamma \times \Gamma B$. et quoniam AB ex duobus nominibus est in Γ in nomina diuisa, $A\Gamma$, ΓB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI]. itaque $A\Gamma^2$, ΓB^2 rationalia sunt et commensurabilia. quare etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ [prop. XV]. et $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 = \Delta\Lambda$. itaque etiam $\Delta\Lambda$ rationale est. et rectae rationali ΔE adplicatum est; quare ΔM rationalis est et rectae ΔE longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam $A\Gamma$, ΓB rationales sunt potentia tantum commensurabiles, $2\,A\Gamma \times \Gamma B$, hoc est MZ, medium est [prop. XXI]. et rectae rationali $M\Lambda$ adplicatum est. itaque MH rationalis est et rectae $M\Lambda$, hoc est ΔE, longitudine

---

m. 1 F. 15. $A\Gamma$, ΓB in ras. V. 16. *αἱ*] *καὶ αἱ* V. 18. *ἐστι*] *εἰσι* BFb. *καί*] (alt.) om. V. 19. Post ΓB del. *καί ἐστιν ἴσον* F. *σύμμετρον* — 20. ΓB] mg. m. 1 P. 20. *ῥητόν* — 21. ΓB] om. P. 22. $\Delta\Lambda$] Λ e corr. FV, ΔA P. *τό*] *τῷ* F. $\Delta\Lambda$] corr. ex ΔA m. rec. P. 23. ΔM] corr. ex ΔH m. 2 F. 27. *ἄρα ἐστί* BFVb. *καί*] om. V. *ἐστι*] om. BFVb. *σύμμετρος* F, corr. m. 2.

μετρος τῇ ΜΔ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει.' καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ, οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ, ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μεῖζον ὄνομα οὖσα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

---

1. ΜΔ] ΔΜ in ras. V. ἔστιν PB. 3. ΔΜ] ΜΔ P. καί εἰσι] e corr. V. εἰσιν B. 4. ΔΜ, ΜΗ ἄρα] e corr. V. 5. ἄρα] supra scr. F, om. P. 7. Post ἐπεί add. γάρ BVb, F m. 2. 8. ΑΓ, ΓΒ m. 2 V. 10. ΔΚ] Κ in ras. V. 13. ΓΒ] ΒΓ in ras. V. 15. ΚΜ μήκει σύμ-

incommensurabilis [prop. XXII]. uerum $M\Delta$ rationalis est et rectae ΔE longitudine commensurabilis. itaque ΔM, MH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et sunt rationales. itaque ΔM, MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. iam demonstrandum, eandem primam esse. quoniam $A\Gamma \times \Gamma B$ medium est proportionale inter $A\Gamma^2$, ΓB^2 [cfr. prop. XXI lemma], etiam $M\Xi$ medium est proportionale inter $\Delta\Theta$, $K\Lambda$. itaque $\Delta\Theta : M\Xi = M\Xi : K\Lambda$, hoc est [VI, 1] $\Delta K : MN = MN : MK$. itaque $\Delta K \times KM = MN^2$ [VI, 17]. et quoniam $A\Gamma^2$, ΓB^2 commensurabilia sunt, etiam $\Delta\Theta$, $K\Lambda$ commensurabilia sunt. quare etiam ΔK, KM commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam est $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > 2\,A\Gamma \times \Gamma B$ [u. ad lemma], erit $\Delta\Lambda > MZ$. quare etiam $\Delta M > MH$ [VI, 1; V, 14]. et

$$\Delta K \times KM = MN^2 = \tfrac{1}{4}\,MH^2,$$

et ΔK, KM commensurabiles sunt. sin datae sunt duae rectae inaequales, et quartae parti quadrati minoris aequale spatium maiori adplicatur figura quadrata deficiens et eam in partes commensurabiles diuidit, maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVII]. itaque ΔM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et ΔM, MH rationales sunt, et maius nomen ΔM rectae rationali propositae ΔE longitudine commensurabilis est.

μετρός ἐστι V. Post *ἐστιν* add. *μήκει* m. 2 B. 16. *τοῦ* — ΓB] supra scr. F. 18. *ἐστί* PVb, comp. F. 20. Post KM add. *μήκει* V, m. 2 B. *ὦσιν* PB. 23. *διαιρεῖ* b. 24. Ante *μεῖζον* ras. 1 litt. F. 25. *τῷ*] *τό* V. 26. καὶ ἡ — 27. *ἐστι*] *in ras. F.* 26. ΔM] MH P, HM Fb.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξα'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατα τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστίν. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστίν ἡ ΜΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητόν ἐστι καὶ τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

---

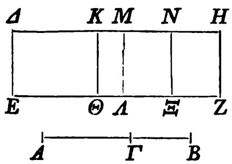
1. ὀνομάτω b. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb, comp. P. 3. ξβ' F. 4. ῥητῆς B, sed corr. 7. ἔστω] e corr. m. 2 F. 9. παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω P. 10. ΑΒ] corr. ex ΑΔ m. 1 b. ἴσον τό P. 12. κατασκευάσθω V. 14. αἱ] in ras. m. 2 B. εἰσίν B. 16. ἐστίν] ἐστί PB, comp. Fb, εἰσί V. 17. παράκειται Theon (BFVb). 19. ἐστι] om. B. 20. ῥη, supra scr. τήν P. ἐστί] om. BFVb. 21. σύμμετρος μήκει V. ΜΛ] Μ e corr. V. 22. ἐστίν] om. V. μήκει τῇ ΜΗ V. εἰσιν B.

Ergo ΔH ex duobus nominibus prima est [deff. alt. 1]; quod erat demonstrandum.

LXI.

Quadratum rectae ex duabus mediis primae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus secundam.

Sit AB recta ex duabus mediis prima in Γ in medias diuisa, quarum maior sit $A\Gamma$, et ponatur rationalis ΔE, et rectae ΔE adplicetur quadrato AB^2 aequale parallelogrammum ΔZ latitudinem efficiens ΔH. dico, ΔH ex duobus nominibus secundam esse.



nam comparentur eadem, quae in priore propositione. et quoniam AB ex duabus mediis prima est in Γ diuisa, $A\Gamma$, ΓB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes [prop. XXXVII]. quare etiam $A\Gamma^2$, ΓB^2 media sunt [prop. XXI]. itaque $\Delta\Lambda$ medium est. et rectae rationali ΔE adplicatum est. itaque $M\Delta$ rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ rationale est, etiam MZ rationale est. et rectae rationali $M\Lambda$ adplicatum est. itaque etiam MH rationalis est et rectae $M\Lambda$ longitudine commensurabilis [prop. XX], hoc est rectae ΔE. itaque ΔM, MH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. et sunt rationales. itaque ΔM, MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

Δεικτέον δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστιν. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

ξβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον

---

3. *ΑΓ*] *Γ* in ras. m. 1 P. 7. *ἐστιν*] *ἐστι* BV, comp. Fb. *ἐστι*] *ἐστιν* P. *ΔΚΜ*] *Κ* corr. ex *Μ* m. 1 P; *ΔΚ, ΚΜ* corr. ex *ΔΚ, ΝΜ* V. 8. *ΜΗ*] corr. ex *ΜΝ* m. 1 b. *δύναται μεῖζον* V. 12. ξβ'] corr. ex ξγ' F. 15. *ὀνομάτων*] corr. ex *μέσων* m. 2 B. *τρίτην*] in ras. m. 1 B. 16. *ἔστω*] in ras. *m. 1 B.* 18. *ἔστω*] *γεγονέτω* V. ΔΕ] in ras. m. 1 B. *τήν*]

iam demonstrandum est, eandem secundam esse.

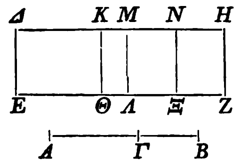
nam quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 > 2\, A\Gamma \times \Gamma B$ [prop. LIX lemma], erit etiam $\Delta\Lambda > MZ$. quare etiam $\Delta M > MH$. et quoniam $A\Gamma^2$, ΓB^2 commensurabilia sunt, etiam $\Delta\Theta$, $K\Lambda$ commensurabilia sunt. quare etiam ΔK, KM commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et $\Delta K \times KM = MN^2$ [cfr. p. 184, 7 sq.]. itaque ΔM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVII]; et MH, ΔE longitudine commensurabiles sunt.

Ergo ΔH ex duobus nominibus secunda est [deff. alt. 2].

LXII.

Quadratum rectae ex duabus mediis secundae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus tertiam.

Sit AB ex duabus mediis secunda in Γ in medias diuisa, ita ut maior pars sit $A\Gamma$, rationalis autem sit ΔE, et rectae ΔE quadrato AB^2 aequale parallelogrammum ΔZ adplicetur latitudinem efficiens ΔH. dico, ΔH ex duobus nominibus tertiam esse.



comparentur eadem, quae in superioribus demonstrationibus. et quoniam AB ex duabus mediis secunda est in Γ diuisa, $A\Gamma$, ΓB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehen-

ῥητὴν τήν F. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 20. τήν] corr. ex τό m. 1 B, τό F. 22. καὶ κατεσκευάσθω, del. καί, F; κατασκευάσθω γάρ V. καί] postea ins. F. 23. ἐστὶ δευτέρα P. 24. ΓB] Γ in ras. V. μέσαι ἄρα V. εἰσίν PB.

ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΛ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ. καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπο τῶν ΑΓΒ. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστιν. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον [δή], ὅτι καὶ τρίτη.

Ὁμοίως δὴ τοῖς προτέροις ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. καί ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. ἐκ τῶν] om. Fb, m. 2 B. ἐστίν] ἐστί PBVb, comp. F. 2. παράκειται] om. V. 3. τὴν ΔΕ ῥητήν P. ἐστίν B. καί] om. B. ΔΜ P. 4. διά] καὶ διά F. 6. ῥητή — 7. μήκει] mg. m. 2 V. 6. ΜΝ V. 8. τῇ ΓΒ — ἡ ΑΓ] supra scr. m. 2 F. 9. τῆς] τῶν B. ΑΓ, ΒΑ B. σύμμετρον B, corr. m. 2. 10. τό] corr. ex τῷ V. τῷ] corr. ex τό m. 2 P. ΑΓ, ΓΒ V. 11. ΓΒ] om. P. 12. ΑΒΓ P. ἐστι PBFV, comp. b. τό] τῷ F. 13. ΔΛ] ΔΑ F et, eras. Λ, b. καί] om. B. 14. ἐστι PBV, comp. Fb. 16. δή] om. P. 17.

dentes [prop. XXXVIII]. quare etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ medium est. est autem $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 = \Delta A$. itaque etiam ΔA medium est. et rectae rationali ΔE adplicatum est. itaque $M\Delta$ rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. eadem de causa etiam MH rationalis est et rectae MA, hoc est ΔE, longitudine incommensurabilis. itaque utraque ΔM, MH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis. et quoniam $A\Gamma$, ΓB longitudine incommensurabiles sunt, et $A\Gamma : \Gamma B = A\Gamma^2 : A\Gamma \times \Gamma B$ [prop. XXI lemma], etiam $A\Gamma^2$ et $A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. quare etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ et $2\,A\Gamma \times \Gamma B$, hoc est ΔA et MZ, incommensurabilia sunt. quare etiam ΔM, MH incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et sunt rationales. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

demonstrandum, eandem tertiam esse.

eodem igitur modo, quo antea [p. 188, 2 seq.], concludemus, esse $\Delta M > MH$, et ΔK, KM commensurabiles esse. et $\Delta K \times KM = MN^2$. itaque ΔM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVII]. et neutra rectarum ΔM, MH rectae ΔE longitudine commensurabilis est.

Ergo ΔH ex duobus nominibus tertia est [deff. alt. 3]; quod erat demonstrandum.

δή] δέ V. πρότερον BFb. ὅτι] corr. ex τι m. rec. P. 19. ΔKM] Δ e corr. V, corr. ex A m. rec. P. 21. συμμέτρου] σ in ras. V. 22. ἐστιν PV. 23. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb.

ξγ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ την ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΔΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητήν ἐστι τὴν ΜΛ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον [δή], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν

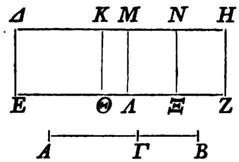
---

1. ξδ' F, et sic deinceps. 6. ῥη supra scr. τή V. δέ τις V. 7. παρά — 8. ΔΖ] mg. m. 1 F. 8. ΔΗ] corr. ex ΔΕ m. 1 F. 9. ἡ ΔΗ] corr. ex ΑΗ F. 10. κατασκευάσθω V. Dein add. γάρ FV. προδεδειμένοις F, corr. m. 2; προδεδιδαγμένοις P, mg. m. 1 γρ. προδεδειγμένοις. 12. ΓΒ ἄρα V. εἰσὶ σύμμετροι B, corr. m. 2. μέν] supra scr. m. 1 F. 13. δ' BFV. 15. ΔΛ] corr. ex ΔΑ m. rec. P. 16. ΔΜ] ΜΔ BVb, "Δ'Μ F. 17. ΑΓΒ P. 18. ἐστι] om.

LXIII.

Quadratum maioris rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quartam.

Sit maior AB in Γ diuisa, ita ut sit $A\Gamma > \Gamma B$, et rationalis sit ΔE, et quadrato AB^2 aequale rectae ΔE adplicetur parallelogrammum ΔZ latitudinem efficiens ΔH. dico, ΔH ex duobus nominibus quartam esse.



comparentur eadem, quae in superioribus demonstrationibus. et quoniam AB maior est in Γ diuisa, $A\Gamma$, ΓB potentia sunt incommensurabiles efficientes summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium [prop. XXXIX]. iam quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ rationale est, $\Delta\Lambda$ rationale est. quare ΔM rationalis est et rectae ΔE longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ medium est, hoc est MZ, et rectae rationali $M\Lambda$ adplicatum est, etiam MH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. itaque ΔM, MH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare ΔM, MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

demonstrandum, eandem quartam esse.

iam eodem modo, quo antea, demonstrabimus, esse

Theon (BFVb). $M\Lambda$] corr. ex $M\Delta$ m. rec. b, $M\Delta$ BF. Deinde add. *παράκειται* Theon (BFVb). 19. *ἐστίν* V. 20. *ἐστίν* P. ΔM] M e corr. m. 1 F. Ante *αἱ* del. *καί* F. 21. *ἄρα*] om. P. 23. *δή*] om. P. 24. δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα, ὅτι Theon (BFVb).

ἡ *ΔΜ* τῆς *ΜΗ*, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ *ΔΚΜ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΜΝ*. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΓ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΓΒ*, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ *ΔΘ* τῷ *ΚΛ*· ὥστε ἀσύμμετρος καὶ ἡ *ΔΚ* τῇ *ΚΜ* ἐστιν. ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ *ΔΜ* ἄρα τῆς *ΜΗ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ *ΔΜ*, *ΜΗ* ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ *ΔΜ* σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ *ΔΕ*.

Ἡ *ΔΗ* ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξδ΄.

Τὸ ἀπο τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ την ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ *ΑΒ* διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ *Γ*, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν *ΑΓ*, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *ΔΕ*, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* ἴσον παρὰ τὴν *ΔΕ* παραβεβλήσθω τὸ *ΔΖ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΔΗ*· λέγω, ὅτι ἡ *ΔΗ* ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

---

1. τῆς] τῇ V? *MN* BV. ὑπὸ τῶν V. *ΔKM*] supra add. *K* V. 3. τό] corr. ex τά? F. 4. ἀσύμμετρος] om. Theon (BFVb). *KM* ἀσύμμετρός ἐστιν Theon (BFVb). 5. ὦσιν BF. 6. Post ἴσον del. παρὰ τὴν μείζονα F. παραλληλόγραμμον] om. V. 7. παρὰ τὴν μείζονα] om. Fb, m. 2 B. 8. διαιρεῖ F, διαιρεῖ μήκει V. 10. *ΔM*] corr. ex *ΔH* F. 11. συμμέτρου F. 13. ΔE] corr. ex ΔH F. 14.

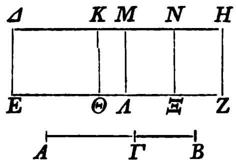
$\Delta M > MH$, et $\Delta K \times KM = MN^2$. iam quoniam $A\Gamma^2$, ΓB^2 incommensurabilia sunt, etiam $\Delta\Theta$, $K\Lambda$ incommensurabilia sunt. quare ΔK, KM incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. sin datae sunt duae rectae inaequales, et quartae parti quadrati minoris aequale parallelogrammum maiori adplicatur figura quadrata deficiens et eam in partes incommensurabiles diuidit, maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. itaque ΔM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis. et ΔM, MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et ΔM rationali propositae ΔE commensurabilis est.

Ergo ΔH ex duobus nominibus quarta est [deff. alt. 4]; quod erat demonstrandum.

LXIV.

Quadratum rectae spatio rationali et medio aequalis quadratae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quintam.

Sit AB recta spatio rationali et medio aequalis quadrata in Γ in rectas diuisa, ita ut $A\Gamma$ maior sit,



et ponatur ΔE rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae ΔE adplicetur ΔZ latitudinem efficiens ΔH. dico, ΔH ex duobus nominibus quintam esse.

ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 17. καί] postea ins. m. 1 F. 20. ῥητή F, sed corr. ἡ AB] m. 2 V.

Κατεσκευάσθω τα αὐτα τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατα το Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ· ὥστε ῥητή ἐστιν ἡ ΔΜ καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, ῥητὴ ἄρα ἡ ΜΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ. ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί εἰσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ [ῥηταὶ] δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάσσων ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξε΄.

Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ

1. *κατασκευάσθω* V. Deinde add. *γάρ* FV. *πρὸ τούτου*] *πρότερον*, corr. m. 2, F. 4. *τετράγωνον* F, corr. m. 2. 5. *δέ* F. 7. *καὶ τό* b. 8. *τῇ*] *ἡ* b. 9. *ΑΓ, ΓΒ* B et corr. *in ΑΒΓ* V. 10. Post *ΔΕ* add. *μήκει* m. 2 B. 11. *ΔΜ*] *in ras.* V. 17. *συμμέτρου*, sed corr., BFb. ῥηταί] om. P,

comparentur eadem, quae antea. iam quoniam AB recta est spatio rationali et medio aequalis quadrata in Γ diuisa, $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, rectangulum autem rationale [prop. XL]. iam quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ medium est, $\Delta\Lambda$ medium est. itaque ΔM rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $2\,A\Gamma \times \Gamma B$, hoc est MZ, rationale est, MH rationalis est et rectae ΔE commensurabilis [prop. XX]. itaque ΔM, MH incommensurabiles sunt [prop. XIII]. quare ΔM, MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eandem quintam esse.

nam similiter demonstrabimus, esse $\Delta K \times KM = MN^2$ et ΔK, KM longitudine incommensurabiles. itaque ΔM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XVIII]. et ΔM, MH potentia tantum commensurabiles sunt, et minor MH rectae ΔE longitudine commensurabilis est.

Ergo ΔH ex duobus nominibus est quinta [deff. alt. 5]; quod erat demonstrandum.

LXV.

Quadratum rectae duobus spatiis mediis aequalis quadratae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus sextam.

Sit AB recta duobus spatiis mediis aequalis qua-

---

m. 2 F. 20. ΔH] ΔM PBb, ΔH in ras. V, mut. in ΔM m. 2 F. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BVb. 27. δ' b. τήν] ῥητὴν τήν F. τῷ] corr. ex τό m. 1 F.

ἀπὸ τῆς *ΑΒ* ἴσον παραβεβλήσθω τὸ *ΔΖ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΔΗ*· λέγω, ὅτι ἡ *ΔΗ* ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.

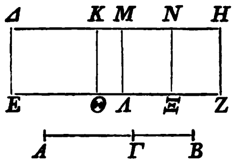
Κατεσκευάσθω γαρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἡ *ΑΒ* δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ *Γ*, αἱ *ΑΓ*, *ΓΒ* ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον τῷ ὑπ' αὐτῶν· ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν *ΔΛ*, *ΜΖ*. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν *ΔΕ* παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν *ΔΜ*, *ΜΗ* καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΔΕ* μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΔΛ* τῷ *ΜΖ*. ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ *ΔΜ* τῇ *ΜΗ*· αἱ *ΔΜ*, *ΜΗ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ *ΔΗ*.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ὁμοίως δὴ πάλιν δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν *ΔΚΜ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΜΝ*, καὶ ὅτι ἡ *ΔΚ* τῇ *ΚΜ* μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ *ΔΜ* τῆς *ΜΗ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν *ΔΜ*, *ΜΗ* σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ *ΔΕ* μήκει.

---

1. ἴσον] ἴσον παραλληλόγραμμον V. 4. κατασκευάσθω V, sed corr. 5. δύο] δ corr. ex μ F. 6. *ΑΓ*] *ΓΑ* F. 9. τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων Theon (BFVb). 10. τῷ] τῷ ἐκ τῶν P. τά] om. b. προδεδειδαγμένα P, corr. m. 1. 12. παράκεινται P. ἐστίν] ἐστὶ καί BFVb. 15. ἐστίν P. 16. *ΜΖ*] corr. ex *ΜΓ* m. 1 F. 17. *ΔΜ*] corr. ex *ΑΜ* m. rec. P. 19. δή] om. BV. 20. δή] γάρ



drata in Γ diuisa, ΔE autem rationalis sit, et rectae ΔE quadrato AB^2 aequale adplicetur ΔZ latitudinem efficiens ΔH. dico, ΔH ex duobus nominibus sextam esse.

comparentur enim eadem, quae antea. et quoniam AB recta est duobus spatiis mediis aequalis quadrata in Γ diuisa, AΓ, ΓB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium et praeterea summam quadratorum rectangulo incommensurabilem [prop. XLI]. quare ex iis, quae antea demonstrata sunt, ΔΛ et MZ media sunt. et rectae rationali ΔE adplicata sunt. quare utraque ΔM, MH rationalis est et rectae ΔE longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ et $2\, A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt, ΔΛ et MZ incommensurabilia sunt. quare etiam ΔM, MH incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque ΔM, MH rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΔH ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eandem sextam esse.

iam rursus similiter demonstrabimus, esse $\Delta K \times KM = MN^2$, et ΔK, KM longitudine incommensurabiles esse. eadem igitur de causa ΔM^2 excedit MH^2 quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis [prop. XVIII]. et neutra rectarum ΔM, MH rectae rationali propositae ΔE longitudine commensurabilis est.

Theon (BFVb). πάλιν] om. V. Deinde add. τοῖς πρὸ τούτου
Theon (BFVb). ὅτι] supra scr. F. 21. KM] MH F, corr.
in KMH m. 2. 22. διὰ ταῦτα BV. 23. συμμέτρου BF,
sed corr.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξς'.

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα το ΑΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ [ἐπεί] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ, ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καί εἰσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Λέγω δή, ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

---

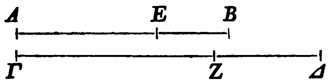
1. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. BFVb. 5. *ἐστίν* P. *ἡ*] m. 2 B. 7. *ἡ* — 8. *ὀνομάτων*] mg. m. 2 B. 11. *ὄνομα*] om. V. 14. ΓΖ] mut. in ΒΖ b. *καί*] in ras. V. 15. ΖΔ] ΔΖ FV. ΓΔ] corr. ex ΕΔ F. *σύμμετρος* — 16. *μήκει*] m. 2 B. 16. *ἐστί*] om. b, m. 2 B. 17. ΖΔ] corr. ex ΔΖ V. *αἱ* ΑΕ, ΕΒ] mg. m. 2 V. 18. *εἰσίν* B. *ἐπεί*] om. P. 19. *πρός* ΓΖ — 20. ΑΕ] mg. m. 2 B. 19. *τὴν* ΓΖ BV. ΓΖ — *πρός*] supra scr. F. *τὴν* ΖΔ V. *ἄρα*] om. F.

Ergo ΔH ex duobus nominibus sexta est [deff. alt. 6]; quod erat demonstrandum.

LXVI.

Recta rectae ex duobus nominibus longitudine commensurabilis et ipsa ex duobus nominibus est et ordine eadem.

Sit AB ex duobus nominibus, et $\Gamma\Delta$ rectae AB longitudine commensurabilis sit. dico, $\Gamma\Delta$ ex duobus nominibus esse et ordine eandem ac AB.



nam quoniam AB ex duobus nominibus est, in E in nomina diuidatur, et maius nomen sit AE. itaque AE, EB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI]. fiat [VI, 12] $AB:\Gamma\Delta = AE:\Gamma Z$. itaque etiam $EB:Z\Delta = AB:\Gamma\Delta$ [V, 16; V, 19 coroll.]. uerum AB, $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt. itaque etiam AE, ΓZ et EB, $Z\Delta$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XI]. et AE, EB rationales sunt. itaque etiam ΓZ, $Z\Delta$ rationales sunt. est autem $AE:\Gamma Z = EB:Z\Delta$ [V, 11]. itaque permutando [V, 16] $AE:EB = \Gamma Z:Z\Delta$. uerum AE, EB potentia tantum commensurabiles sunt. itaque etiam ΓZ, $Z\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. et sunt rationales. ergo $\Gamma\Delta$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

iam dico, eam ordine eandem esse ac AB.

---

20. οὕτως ἡ ΓΖ V. 21. εἰσί] om. P. 23. ΓΔ] Δ in ras. V. 24. δή] om. V. ὅτι] ὅτι καί BFV.

Ἡ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται ἤτοι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ δια τοῦτο ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ· ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἔσται ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καί ἐστιν ἑκατέρα τρίτη. εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, και ἐστιν ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ὥστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ

---

1. *ΑΕ*] corr. ex *ΑΒ* m. 2 F. *τῆς*] corr. ex *τῇ* m. 2 F. 2. *ἀσυμμέτρου*] corr. ex *συμμέτρου* m. 2 B. *εἰ*] corr. ex *η* V. 3. *τῆς*] corr. ex *τῇ* m. 2 F. *ἀσυμμέτρου* b, *ἀ-* supra add. m. 2 F. 4. *τῆς*] corr. ex *τῇ* m. 2 V. *ΔΖ* V. *δυνήσηται* b. 5. *ἀσυμμέτρου* Fb. 7. *ΓΔ*] postea add. F, dein del. *ΒΓ*. 8. *εἰ*] postea ins. F. 9. *ΔΖ* Fb. 10. Post *ἐστιν* del. *ἡ* m. 1 P. *τοῦτο*] corr. ex *τοῦ* m. 2 F. 11. *ἔσται*] (alt.) *ἐστι* b, om. V. 12. *ἐστι δευτέρα* V. *δ'* F. 13. *οὐδὲ οὐδετέρα* BF. 14. *τρίτη*] *ῥητή* b. *εἰ δὲ ἡ*] *ἡ δέ* b. 15. *τῆς*] corr. ex *τῇ* m. 2 F. *συμμέτρου* BF, sed corr. 16. *ΖΔ*]

nam AE^2 excedit EB^2 aut quadrato rectae sibi commensurabilis aut incommensurabilis. iam si AE^2 excedit EB^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam ΓZ^2 excedet $Z\Delta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. et siue AE rationali propositae commensurabilis est, etiam ΓZ ei commensurabilis erit [prop. XII]; quare utraque AB, $\Gamma\Delta$ ex duobus nominibus prima est [deff. alt. 1], hoc est ordine eadem. siue EB rationali propositae commensurabilis est, etiam $Z\Delta$ ei commensurabilis est [prop. XII]; quare rursus ordine eadem erit ac AB; nam utraque earum ex duobus nominibus secunda erit [deff. alt. 2]. siue neutra rectarum AE, EB rationali propositae commensurabilis est, neutra rectarum ΓZ, $Z\Delta$ ei commensurabilis est [prop. XIII], et utraque tertia est [deff. alt. 3]. sin AE^2 excedit EB^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam ΓZ^2 excedit $Z\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XIV]. et siue AE rationali propositae commensurabilis est, etiam ΓZ ei commensurabilis est [prop. XII], et utraque quarta est [deff. alt. 4]. siue EB, etiam $Z\Delta$ commensurabilis est, et utraque quinta est [deff. alt. 5]. siue neutra rectarum AE, EB, etiam neutra rectarum ΓZ, $Z\Delta$ rectae rationali propositae commensurabilis est, et utraque sexta est [deff. alt. 6].

Quare recta rectae ex duobus nominibus longitu-

ΔZ F. *δυνήσεται* Theon (BFVb). *συμμέτρου* BF, sed corr. 17. *ἐστι* — 18. *ῥητῇ*] e corr. F. 19. *ἐστιν*] supra scr. m. 1 P, *ἔσται* FVb. *ἡ*] (prius) m. 2 P. *καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη*] mg. m. 1 P.

δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξζ΄.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ προς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ [ἄρα] δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστι τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ· ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ προς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ,

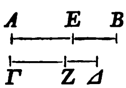
1. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb. 3. ξζ΄] ζ΄ in ras. F. 4. τῇ] m. 2 B. καὶ αὐτή] om. Theon (BFVb). 7. ἡ ΓΔ μήκει V. 8. ΑΒ] ΒΔ P. 9. διῃρημένη Theon (BFVb). 10. εἰς] ἐς V. ΑΕ] ΕΑ P. εἰσίν P. 12. τὴν ΓΔ V. τὴν ΓΖ V. 13. ΖΔ] in ras. V, ΔΖ B. τὴν ΓΔ V. 14. ἀσύμμετρος δέ b, sed corr. 15. καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ (ΖΓ F), ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ (corr. ex ΔΖ V) Theon (BFVb). 16. μέσαι δέ] καί εἰσι μέσαι Theon (BFVb). καὶ αἱ] καί b. 17. ΑΕ]

dine commensurabilis ex duobus nominibus est et ordine eadem; quod erat demonstrandum.

LXVII.

Recta rectae ex duabus mediis longitudine commensurabilis et ipsa ex duabus mediis est et ordine eadem.

Sit AB ex duabus mediis, et rectae AB longitudine commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ ex duabus mediis esse et ordine eandem ac AB.



nam quoniam AB ex duabus mediis est, in E in medias diuidatur. AE, EB igitur mediae sunt potentia tantum commensurabiles. et fiat $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma Z$ [VI, 12]. itaque etiam [V, 19 coroll.; V, 16] $EB : Z\Delta = AB : \Gamma\Delta$. uerum AB, $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt; itaque etiam utraque AE, EB utrique ΓZ, $Z\Delta$ commensurabilis est [prop. XI]. uerum AE, EB mediae sunt. itaque etiam ΓZ, $Z\Delta$ mediae sunt [prop. XXIII]. et quoniam est $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, et AE, EB potentia tantum commensurabiles sunt, etiam ΓZ, $Z\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt [prop. XI]. demonstrauimus autem, easdem medias esse. ergo $\Gamma\Delta$ ex duabus mediis est.

iam dico, etiam ordine eam eandem esse ac AB.

nam quoniam est $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, erit etiam [prop. XXI lemma] $AE^2 : AE \times EB = \Gamma Z^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$.

AB B. τὴν EB V. τὴν $Z\Delta$ V. 18. εἰσὶ σύμμετροι BFVb. 19. ἄρα] om. P. εἰσὶ σύμμετροι BFVb. 20. $\Delta\Gamma$ F. ἐστί BVb, comp. F. 22. τὴν EB BV. οὕτως ἡ F. ΓZ] $\Gamma\Delta$ F. 23. τὴν $Z\Delta$ V, ZA F. 24. ΓΖ] ΖΓ F. ΓΖΔ] supra scr. Z m. 2 V. 25. ὡς] ἄρα ὡς F.

οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕΒ* πρὸς τὸ ὑπο τῶν *ΓΖΔ*. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΕ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΓΖ*· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕΒ* τῷ ὑπὸ τῶν *ΓΖΔ*. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕΒ*, καὶ τὸ ὑπο τῶν *ΓΖΔ* ῥητόν ἐστιν [καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἐκ δύο μέσων πρώτη]. εἴτε μέσον, μέσον, καί ἐστιν ἑκατέρα δευτέρα.

Καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ *ΓΔ* τῇ *ΑΒ* τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξη'.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν.

Ἔστω μείζων ἡ *ΑΒ*, καὶ τῇ *ΑΒ* σύμμετρος ἔστω ἡ *ΓΔ*· λέγω, ὅτι ἡ *ΓΔ* μείζων ἐστίν.

Διῃρήσθω ἡ *ΑΒ* κατὰ τὸ *Ε*· αἱ *ΑΕ*, *ΕΒ* ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ *ΑΒ* πρὸς τὴν *ΓΔ*, οὕτως ἥ τε *ΑΕ* πρὸς τὴν *ΓΖ* καὶ ἡ *ΕΒ* πρὸς τὴν *ΖΔ*, καὶ ὡς ἄρα ἡ *ΑΕ* πρὸς τὴν *ΓΖ*, οὕτως ἡ *ΕΒ* πρὸς τὴν *ΖΔ*. σύμμετρος δὲ ἡ *ΑΒ* τῇ *ΓΔ*· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ* ἑκατέρᾳ τῶν *ΓΖ*, *ΖΔ*. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ *ΑΕ* πρὸς τὴν *ΓΖ*, οὕτως ἡ *ΕΒ* πρὸς τὴν *ΖΔ*, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ *ΑΕ* πρὸς *ΕΒ*, οὕτως ἡ *ΓΖ* πρὸς *ΖΔ*, καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ *ΑΒ* πρὸς τὴν *ΒΕ*, οὕτως

1. *ΓΖΔ*] *Δ* in ras. m. 1 b; *ΓΔΖ* P, γρ. *ΓΖΔ* mg. m. 1. 2. δέ] corr. ex ἄρα m. 2 F. τό — 3. ἄρα] mg. m. 2 F. 4. ἐστιν B. 5. ἔσται BFb. καί — 6. πρώτη] om. P. 5. ἐστιν] *comp. post* ras. 1 litt. F, ἔσται V. 6. εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΕΒ*, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΓΖΔ* Theon (BFVb). 8. ἔσται]

permutando [V, 16] erit $AE^2 : \Gamma Z^2 = AE \times EB : \Gamma Z \times Z\Delta$. uerum AE^2, ΓZ^2 commensurabilia sunt. itaque etiam $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt [prop. XI]. itaque siue $AE \times EB$ rationale est, etiam $\Gamma Z \times Z\Delta$ rationale est; siue medium, medium est [prop. XXIII coroll.], et utraque secunda est [prop. XXXVII—XXXVIII].

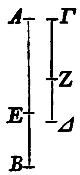
Ea de causa $\Gamma\Delta$ ordine eadem erit ac AB; quod erat demonstrandum.

LXVIII.

Recta maiori commensurabilis et ipsa maior erit.

Sit AB maior, et rectae AB commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ maiorem esse.

diuidatur AB in E. itaque AE, EB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium [prop. XXXIX],



et fiant eadem, quae antea. et quoniam est $AB : \Gamma\Delta = AE : \Gamma Z$ et $AB : \Gamma\Delta = EB : Z\Delta$ [cfr. p. 204, 11 sq.], erit etiam $AE : \Gamma Z = EB : Z\Delta$ [V, 11]. uerum AB, $\Gamma\Delta$ commensurabiles sunt. quare etiam utraque AE, EB utrique ΓZ, $Z\Delta$ commensurabilis est [prop. XI]. et

---

om. Vb. *καὶ ἡ* BFVb. $\Gamma\Delta$] $A\Delta$ b. 9. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. BFVb. 10. *ξη′*] *ξ* seq. ras. 1 litt. F. 11. *μείζονι*] *ο* eras. b. 14. *ὅτι καί* BFb. $\Gamma\Delta$] Δ post ras. 1 litt. b. *ἐστί* PV, comp. Fb; *ἐστὶ καί* B. 15. AE] corr. ex AB F. EB] m. rec. P. *ἄρα*] m. 2 F. 17. *δ'*] *δέ* F. *ὑπ' αὐτῶν*] corr. ex *ὑπὸ τῶν* m. 1 P. 18. *καὶ γεγονέτω*] *γεγονέτω γάρ* P. 19. *τε*] om. F. 20. EB] BE' F. *τήν*] om. P. *καὶ ὡς ἄρα*] *ἔστιν ἄρα καὶ ὡς* in ras. V. *ἡ* AE — 21. $Z\Delta$] in ras. V. 21. ΓZ] EB V. EB] ΓZ V. *τήν*] om. Bb. 22. AB] corr. ex EB m. 2 F. 24. τήν] (alt.) om. P. 25. *τὴν EB* V. *τὴν ZΔ* V.

ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καί ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἅμα ῥητόν, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἅμα ῥητόν ἐστιν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καί ἐστι μέσον τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων.

Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ξθ'.

Ἡ τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος [καὶ αὐτὴ] ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

---

1. τὴν ΔΖ] ΔΒ mut. in ΔΖ m. rec. P; τὴν ΖΔ FV. 3. ΔΖ] ΖΔ F. 4. τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρός] m. rec. P. 5. τό] (alt.) e corr. V. 6. τά] τό Fb, et B, corr. m. 2. 7. τά] τό PFb, et B, sed corr. ΓΖ] ΓΔ F. 8. τά] τό F, et B, sed corr. 9. τά] τό F, et B, sed corr. ΓΖ] ΕΖ b, et F, sed. corr.; Γ in ras. B. 11. ΑΕ] Α e corr. b. ΓΖ] ΕΖ b, et F, sed corr. 12. τά] τό F. τά] τό PF. 13. ἔσται V. 15. καί

quoniam est $AE : \Gamma Z = EB : Z\Delta$ et permutando [V, 16] $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$, etiam componendo erit [V, 18] $AB : BE = \Gamma\Delta : \Delta Z$. quare etiam $AB^2 : BE^2 = \Gamma\Delta^2 : \Delta Z^2$ [VI, 20]. iam similiter demonstrabimus, esse etiam

$$AB^2 : AE^2 = \Gamma\Delta^2 : \Gamma Z^2.$$

quare etiam $AB^2 : AE^2 + EB^2 = \Gamma\Delta^2 : \Gamma Z^2 + Z\Delta^2$. permutando igitur [V, 16]

$$AB^2 : \Gamma\Delta^2 = AE^2 + EB^2 : \Gamma Z^2 + Z\Delta^2.$$

uerum AB^2, $\Gamma\Delta^2$ commensurabilia sunt. itaque etiam $AE^2 + EB^2$ et $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia sunt [prop. XI]. et $AE^2 + EB^2$ rationale est, et[1]) $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ rationale. eodem modo etiam $2\,AE \times EB$ et $2\,\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt. et $2\,AE \times EB$ medium est. itaque etiam $2\,\Gamma Z \times Z\Delta$ medium est [prop. XXIII coroll.]. itaque ΓZ, $Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt [prop. XIII; cfr. p. 206, 15 et 22] efficientes summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium. itaque tota $\Gamma\Delta$ irrationalis est maior, quae uocatur [prop. XXXIX].

Ergo recta maiori commensurabilis maior est; quod erat demonstrandum.

LXIX.

Recta rectae spatio rationali et medio aequali quadratae commensurabilis ipsa spatio rationali et medio quadrata aequalis est.

1) Post $Z\Delta$ lin. 13 Augustus non male addidit ἄρα.

ἔστι μέσον] μέσον δέ V. 16. ΓZ] supra add. E b. ΓZ] Γ in ras. m. 2 P, supra scr. E b. 17. εἰσὶν ἀσύμμετροι BFVb. εἰσιν P. 19. ἡ ὅλη Vb. 21. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 24. ῥητόν] -ον in ras. B. 25. καὶ αὐτή] om. P.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$· δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Διῃρήσθω ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγ'νων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓZ, $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ AE, EB τῷ ὑπὸ ΓZ, $Z\Delta$· ὥστε καὶ τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΓZ, $Z\Delta$ ῥητόν.

Ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ο'.

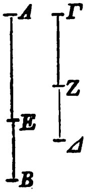
Ἡ τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB, καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ $\Gamma\Delta$· δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστιν ἡ AB, διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E· αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον

1. καὶ τῇ AB] supra scr. m. 1 F. 2. δεικτέον] λέγω V. 3. ἐστί B, comp. Fb. 7. δέ F. κατασκευάσθω b. 8. αἱ] ἡ V. 11. δ' P. τῶν AE V. 12. τῶν ΓZ (corr. ex ΓH) V. μέν] om. P. 13. τετράγωνον P. δέ F. 15. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 17. ο'] seq. ras. 1 litt. F. 18. καὶ αὐτὴ δύο V. 21. ἡ] ἔστω ἡ V. δεικτέον] λέγω V. δὴ ὅτι B. 24. κατὰ τὸ E εἰς τὰς εὐθείας V. εὐθείας] m. 2 B.

Sit AB spatio rationali et medio aequalis quadrata, et rectae AB commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. demonstrandum, etiam $\Gamma\Delta$ spatio rationali et medio aequalem esse quadratam.



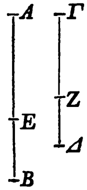
diuidatur AB in rectas in E; itaque AE, EB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, rectangulum autem rationale [prop. XL]; et comparentur eadem, quae antea. iam similiter demonstrabimus, ΓZ, $Z\Delta$ potentia incommensurabiles esse et $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia et $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia. quare etiam $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ medium est, $\Gamma Z \times Z\Delta$ autem rationale.

Ergo $\Gamma\Delta$ spatio rationali et medio aequalis est quadrata; quod erat demonstrandum.

LXX.

Recta rectae duobus spatiis mediis aequali quadratae commensurabilis ipsa duobus spatiis mediis quadrata est aequalis.

Sit AB duobus spatiis mediis aequalis quadrata, et rectae AB commensurabilis $\Gamma\Delta$. demonstrandum, etiam $\Gamma\Delta$ duobus spatiis mediis aequalem esse quadratam.



nam quoniam AB duobus spatiis mediis aequalis est quadrata, in E in rectas diuidatur. itaque AE, EB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium et praeterea $AE^2 + EB^2$, $AE \times EB$ incommensurabilia [prop. XLI];

ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν [τετραγώνων] μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ* τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ*· καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ *ΓΖ*, *ΖΔ* δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ* τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΓΖ*, *ΖΔ*, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν *ΑΕ*, *ΕΒ* τῷ ὑπὸ τῶν *ΓΖ*, *ΖΔ*· ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΓΖ*, *ΖΔ* τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΓΖ*, *ΖΔ* μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΓΖ*, *ΖΔ* τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν *ΓΖ*, *ΖΔ*.

Ἡ ἄρα *ΓΔ* δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οα΄.

Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ *ΑΒ*, μέσον δὲ τὸ *ΓΔ*· λέγω, ὅτι ἡ τὸ *ΑΔ* χωρίον δυναμένη ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Τὸ γὰρ *ΑΒ* τοῦ *ΓΔ* ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μεῖζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *ΕΖ*, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν *ΕΖ* τῷ *ΑΒ* ἴσον τὸ *ΕΗ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΕΘ*· τῷ δὲ *ΔΓ* ἴσον παρὰ τὴν *ΕΖ*

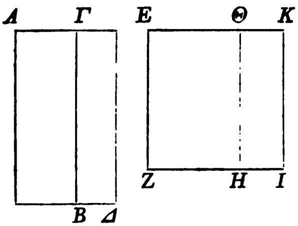
1. τετραγώνων] om. P. ὑπ'] mut. in ἀπ' m. 2 F, ἀπ' b. 3. *ΑΕ*] (prius) corr. ex *ΑΒ* m. 2 F. 5. *ΓΖ*] in ras. m. 1 P. 8. τὸ δέ] ὥστε καὶ τό P. 9. *ΓΔ*, *ΔΖ* P. 12. τῷ] τό V. 13. *ΓΔ* ἄρα B. *ΓΔ*] *Δ* postea ins. V. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. *BFVb*. 15. *οβ΄*, *β* eras. F. 17. γίγνονται] γίνονται BFVb et,

et comparentur eadem, quae antea. iam similiter demonstrabimus, ΓZ, $Z\Delta$ potentia incommensurabiles esse, et $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia, et $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia. quare etiam $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ medium est et $\Gamma Z \times Z\Delta$ medium et praeterea $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ incommensurabilia.

Ergo $\Gamma\Delta$ duobus spatiis mediis aequalis est quadrata; quod erat demonstrandum.

LXXI.

Spatiis rationali et medio compositis quattuor irrationales oriuntur, aut recta ex duobus nominibus aut ex duabus mediis prima aut maior aut spatio rationali et medio aequalis quadrata.



Sit AB rationale, $\Gamma\Delta$ autem medium. dico, rectam spatio $A\Delta$ aequalem quadratam aut ex duobus nominibus esse aut ex duabus mediis primam aut maiorem aut spatio rationali et medio aequalem quadratam.

est enim aut $AB > \Gamma\Delta$ aut $AB < \Gamma\Delta$. sit prius $AB > \Gamma\Delta$. et ponatur rationalis EZ, et rectae EZ spatio AB aequale adplicetur EH latitudinem efficiens $E\Theta$; spatio autem $\Delta\Gamma$ aequale rectae EZ adplicetur ΘI latitudinem efficiens ΘK. et quoniam AB rationale est

supra add. γ m. 1, P. ἤτοι] corr. in ἤ τε m. rec. P, corr. ex ὁ τῇ V, ex ἡ F; ἤ τε B. 21. ἡ] m. 2 F. $A\Delta$] A e corr. V. ἤτοι] ἤ V. 27. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. Post EZ add. *Theon:* τουτέστι τὴν ΘH (BFVb).

παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΕΗ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ [ῥητὴν] τὴν ΕΖ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΘΙ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ὥστε καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, το δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ τοῦ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι οὖν ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καί ἐστιν ἡ μείζων ἡ ΘΕ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ

1. ΘΙ] mut. in ΘΗ F, Ι eras. V. 3. καί] (prius) m. 2 F. ῥητήν] om. P. 4. ΕΘ] (prius) ΘΕ F. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ Theon (BFVb). ἔστιν P. 6. ΘΙ] Ι in ras. F. 7. ΘΙ] Ι in ras. F. Post παράκειται add. Theon: τουτέστι (-ιν V) τὴν ΘΗ (BFVb). 8. ἄρα] corr. ex ἔσται F. 9. ΕΖ] Ζ postea ins. m. 1 V. ΓΔ] eras. V. 11. ΕΗ] ΖΗ e corr. V. ΘΙ] corr. ex ΘΓ P, Ι in ras. F. 12. ΘΙ] Ι in ras. F. 13. ἐστίν B. 15. ΕΚ] corr. ex ΕΘ m. rec. b. 16. Post Θ ras. 1 litt. B. μείζων V, sed corr. 18. ΘΙ] Ι e corr. F. καί] m. 2 F. ΘΙ] Ι in ras. F. 20. ἑαυτῇ μήκει] om. V. 21. ἀσυμμέτρου] συμμέτρῳ F, corr. m. 2; συμμέτρου B,

et $AB = EH$, etiam EH rationale est. et rectae EZ adplicatum est latitudinem efficiens $E\Theta$. itaque $E\Theta$ rationalis est et rectae EZ longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam $\Gamma\Delta$ medium est et $\Gamma\Delta = \Theta I$, etiam ΘI medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ΘK. itaque ΘK rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $\Gamma\Delta$ medium est, AB autem rationale, AB et $\Gamma\Delta$ incommensurabilia sunt. quare etiam EH, ΘI incommensurabilia sunt. uerum $EH : \Theta I = E\Theta : \Theta K$ [VI, 1]. quare etiam $E\Theta$, ΘK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque $E\Theta$, ΘK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EK ex duobus nominibus est in Θ diuisa [prop. XXXVI]. et quoniam $AB > \Gamma\Delta$ et $AB = EH$, $\Gamma\Delta = \Theta I$, erit etiam $EH > \Theta I$. itaque etiam $E\Theta > \Theta K$ [V, 14]. iam $E\Theta^2$ excedit ΘK^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis. prius excedat quadrato rectae sibi commensurabilis; et maior ΘE rationali propositae EZ commensurabilis est. ergo EK ex duobus nominibus est prima [deff. alt. 1]. EZ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus prima comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata ex duobus nominibus est [prop. LIV]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata ex duobus nominibus est; quare etiam recta spatio $A\Delta$ aequalis quadrata ex duobus nominibus est. iam uero $E\Theta^2$ excedat ΘK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis; et maior $E\Theta$

corr. m. 2. 22. *ἐστιν ἡ*] *ἐστι* B. ΕΘ F. 23. ἡ] m. 2 P. *ἐκ*] *supra scr. b.*

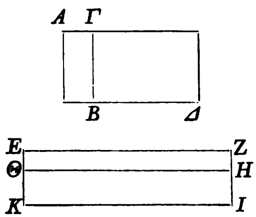
πρώτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἡ ἄρα το ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ το ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἀλλὰ δη δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· καί ἐστιν ἡ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥστε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καί ἐστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπο ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ

2. ῥητῶν V. 3. ἐκ] ἡ ἐκ F. ἐστί P. ἡ ἄρα] corr. ex παρα m. 2 P. ΕΙ] Ι in ras. F. 5. δυναμένη] corr. ex ἀδυναμένη V. 6. Ante ἡ ras. 3 litt. F. ΘΚ] corr. ex ΟΣ m. 2 F. μείζων b. συμμέτρου B, sed corr. 7. ἐστιν] ἐστι, supra scr. ω, B; ἔστω P. ἡ] (prius) om. B. 11. μεῖζον V, sed corr. 12. ΕΙ] Ι in ras. F. 15. ΘΙ] ΘΚ b et corr. *ex ΘΓF.* ΕΘ ἄρα b. ἔλασσον b. 17. συμμέτρου — ἀπό] mg. *m. 1 P.* συμμέτρου] ἀσυμμέτρου V, sed α eras. ἀσυμμέτρου]

rationali propositae EZ longitudine commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est quarta [deff. alt. 4]. EZ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quarta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata irrationalis est maior, quae uocatur [prop. LVII]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata maior est. ergo etiam recta spatio $A\Delta$ aequalis quadrata maior est.

iam uero sit $AB < \Gamma\Delta$. quare etiam $EH < \Theta I$. itaque etiam $E\Theta < \Theta K$ [VI, 1; V, 14]. uerum ΘK^2 excedit $E\Theta^2$ quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis. prius excedat quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. et minor $E\Theta$ rationali propositae EZ longitudine commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est secunda [deff. alt. 2]. EZ autem rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus secunda comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata ex duabus mediis est prima [prop. LV]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata ex duabus mediis est prima. ergo etiam recta spatio $A\Delta$ aequalis quadrata ex duabus mediis prima est. iam uero ΘK^2 excedat ΘE^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis; et minor $E\Theta$ rationali propositae EZ commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est quinta [deff. alt. 5]. EZ autem ratio-



συμμέτρου BV, sed corr. 19. ἡ] (prius) m. 2 F, om. B. 21. δέ] (alt.) m. 2 F. περιέχεται P. 23. EI] I in ras. F. 24. χωρίον] om. V. 25. ΑΔ χωρίον BFb.

δὴ ἡ ΘΚ τῆς ΘΕ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητον καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οβ'.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ [ἡ] δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθω γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ, ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν ἢ ἔλασσον. ἔστω, εἰ τύχοι, πρότερον μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ

---

1. ΘΕ] supra scr. η b, ΘΗ e corr. F, ΕΘ V (Ε in ras.). συμμέτρου F, et B, sed corr. m. 2. 2. ἡ] (prius) om. B. 4. ἐστί] postea ins. F, ἐστίν P. 7. δυναμένη — 8. χωρίον] in ras. F. 9. ῥητόν — δυναμένη] mg. m. 2 B. ἐστί PBb. 10. ἀνάλογοι P, sed corr. m. rec. 11. γίνονται FVb. ἤτοι ἡ V. 12. ἢ ῥητόν] m. 2 V. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 13. ογ', sed corr. m. 2, F. 14. συμμέτρων, corr. m. 2, F. συντεθέντων Theon (BFVb); συντιθεμένων supra scr. m. 2 B. 15. Post δύο ras. 2 litt. V. γίνονται Fb, et supra scr. γ, V. ἐκ] ἡ ἐκ V. 16. ἡ] deleo. 17. συγκείσθω FV. τά] τό b. 18. ΑΔ] corr. ex ΓΔ m. 2 F. 19. ἤ] ἢ ἡ P. 21. εἰ τύχοι] om. Theon (BFVb).

nalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est [prop. LVIII]. itaque recta spatio EI aequalis quadrata recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est. quare etiam recta spatio $A\Delta$ aequalis quadrata recta spatio rationali et medio aequalis quadrata est.

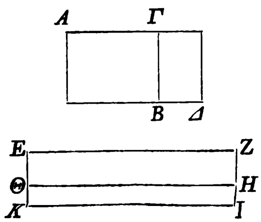
Ergo spatiis rationali et medio compositis quattuor irrationales oriuntur, aut recta ex duobus nominibus aut ex duabus mediis prima aut maior aut spatio rationali et medio aequalis quadrata; quod erat demonstrandum.

LXXII.

Duobus mediis sibi incommensurabilibus compositis reliquae duae irrationales oriuntur, aut recta ex duabus mediis secunda aut duobus spatiis mediis aequalis quadrata.

Componantur enim duo media sibi incommensurabilia AB, $\Gamma\Delta$. dico, rectam spatio $A\Delta$ aequalem quadratam aut ex duabus mediis secundam esse aut duobus spatiis mediis aequalem quadratam.

nam aut $AB > \Gamma\Delta$ aut $AB < \Gamma\Delta$. sit uerbi gratia prius $AB > \Gamma\Delta$, et ponatur recta rationalis EZ, et



spatio AB aequale rectae EZ adplicetur EH latitudinem efficiens $E\Theta$, spatio autem $\Gamma\Delta$ aequale ΘI latitudinem efficiens ΘK. et quoniam utrumque AB, $\Gamma\Delta$ medium est, etiam utrumque EH, ΘI medium est. et rectae

ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΓΔ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΙ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς ΕΘ, ΘΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΘ, ΘΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καί ἐστιν ἴσον το μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει. αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. ἤτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τουτέστι τὸ ΑΔ, δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλα δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπο ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ, ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον

---

1. *τις ῥητή* F. *τῷ*] corr. ex *τό* m. 2 P. 2. *ΕΗ*] *ΕΖ* b. 3. Post *ἴσον* add. *παρὰ τὴν ΘΗ* V, del. m. 2. 4. *ἐπεί — ἄρα καί*] om. b. 5. *τῶν*] corr. ex *τό* m. 2 b. *ΕΗ*] supra add. *Θ* b. *ΘΙ*] *ΘΓ*, supra add. Η, b. *καί*] m. 2 F. 6.

rationali EZ adplicata sunt latitudines efficientia $E\Theta$, ΘK. itaque utraque $E\Theta$, ΘK rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam AB, $\Gamma\Delta$ incommensurabilia sunt, et $AB = EH$, $\Gamma\Delta = \Theta I$, etiam EH, ΘI incommensurabilia sunt. uerum $EH : \Theta I = E\Theta : \Theta K$ [VI, 1]. itaque etiam $E\Theta$, ΘK longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. quare $E\Theta$, ΘK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EK ex duobus nominibus est [prop. XXXVI]. uerum $E\Theta^2$ excedit ΘK^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis. prius excedat quadrato rectae longitudine commensurabilis. et neutra rectarum $E\Theta$, ΘK rectae rationali propositae EZ longitudine commensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est tertia [deff. alt. 3]. uerum EZ rationalis est. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus tertia comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata ex duabus mediis est secunda [prop. LVI]. itaque recta spatio EI, hoc est, $A\Delta$, aequalis quadrata ex duabus mediis est secunda. iam uero $E\Theta^2$ excedat ΘK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis; et utraque $E\Theta$, ΘK rectae EZ longitudine incommensurabilis est. itaque EK ex duobus nominibus est sexta [deff. alt. 6]. sin spatium recta rationali et recta ex duobus nominibus sexta comprehenditur, recta

---

παράκειτα P, παράκεινται V. ποιοῦντα Vb. 7. ΘK ἄρα V. ἐστιν P. 8. ἀσύμμετρος P, corr. m. rec. ἐστιν P. AB] supra add. H V. ἐστιν] m. 2 F. 10. πρός] m. 2 F. τό] τῷ F. 11. πρὸς τήν V. 12. εἴσιν P. 14. ἀσυμμέτρου V, sed corr. 15. συμμέτρου BV, corr. m. 2. 16. ἀσυμμέτρου V, sed corr.; ἀ- supra add. b m. 1. 17. ἐστιν P. 18. τρίτη] corr. ex ῥητή m. rec. b. 25. τῇ] corr. ex τῆς B. ἐκ] m. rec. P.

δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

[Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ AB τοῦ $\Gamma\Delta$, ἡ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἤτοι δύο μέσα δυναμένη].

Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίγνονται ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ᾽ αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρα ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ᾽ ἣν παράκειται μήκει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρα ῥητην παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν

---

1. ἡ δύο] δύο BV. ὥστε καὶ ἡ] ἡ ἄρα V. 2. AB b. χωρίον] om. V. ἡ] om. BFV. δύο] β P, δύο m. rec. μέσας F. 3. ὁμοίως — 5. δυναμένη] om. P. 4. τὸ $A\Delta$ χωρίον] τὸ χωρίον τὸ $A\Delta$ V. ᾗ] om. F. 5. ἤτοι δύο μέσα] ἢ ῥητὸν καὶ μέσον B. 6. ἡ δύο F. 7. γίνονται PFVb. ἤτοι ἡ V. 8. ἢ] ἢ ἡ V. δύο] in ras. m. 1 P. 9. ογ΄, γ in ras., F. αἱ] supra scr. b. 11. ἀπὸ τῆς F. 12. τῇ] corr. ex

spatio aequalis quadrata recta est duobus spatiis mediis aequalis quadrata [prop. LIX]. quare recta spatio $A\Delta$ aequalis quadrata recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata est.

Ergo duobus spatiis mediis sibi incommensurabilibus compositis reliquae duae irrationales oriuntur, aut recta ex duabus mediis secunda aut duobus spatiis mediis aequalis quadrata.

Recta ex duobus nominibus et irrationales ab ea deriuatae neque mediae neque inter se eaedem sunt. nam quadratum mediae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rationalem et rectae, cui adplicatum est, longitudine incommensurabilem [prop. XXII]. quadratum autem rectae ex duobus nominibus rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus primam [prop. LX]. quadratum autem rectae ex duabus mediis primae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus secundam [prop. LXI]. quadratum autem rectae ex duabus mediis secundae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus tertiam [prop. LXII]. quadratum autem maioris rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quartam [prop. LXIII]. quadratum autem rectae spatio rationali et medio aequalis quadratae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus quintam [prop. LXIV].

τήν V. *ἧν*] corr. ex *ἧι* F. 13. *δέ*] *δ'* P. *παραβαλόμενον* P. 15. *τὸ δέ* — 19. *τρίτην*] mg. m. 2 V. 16. *ποιεῖ*] om. V. 17. *δέ*] *δ'* P. 19. *δέ*] *δ'* P. 21. *δέ*] *δ'* P. 23. *τό*] e corr. V. *δέ*] *δ'* P. 24. *πλάτος*] corr. ex *πάτος* m. 1 P.

ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. τὰ δ' εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δέ, ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· ὥστε καὶ αὗται αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

ογ΄.

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἀποτομή.

Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς τῆς ΑΒ ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς υπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΑ, καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπο τῶν ΑΒ,

---

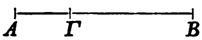
1. *τὰ δ'*] *ἐπεὶ οὖν τά* Theon (BFVb). *εἰρημένα*] *εἰ-* e corr. V. 3. *τῇ*] om. F. 4. *ὥστε*] *δῆλον ὡς* Theon (BFVb). 5. Seq. *δευτέρα τάξις ἑτέρων λόγων* (om. b) *τῶν κατὰ ἀφαίρεσιν* PBVb (uidetur fuisse in F, sed sust. reparatio); *ἀρχὴ τῶν κατ' ἀφαίρεσιν ἑξάδων* m. 2 B. *ογ΄*] postea add. F (ab initio haec prop. a praecedentibus dirempta non erat). 7. *τῇ*] om. b. *ἡ λοιπή*] *λοιπῆι* F. 8. *ἐστι* BV, comp. Fb. *δέ*] *δή* B. 9. *ῥητῆς*] *διττῆς* F. *ΒΓ*] *ΓΒ* F. 11. *ἡ καλουμένη*] *καλείσθω δέ* V. 12. *ἀσύμμετρος*] corr. ex *ἄρα σύμμετρος* m. rec. P, ex *σύμμετρος* m. 2 B. *ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ ἀσύμμετρός ἐστι* V. 13. *τήν*] *τάς* F. 14. *ἀσύμμετρον*] *-ον* e corr. V, corr. ex *-ος* m. rec. P. 16. *σύμμετρα — τῶν*]

quadratum autem rectae duobus spatiis mediis aequalis quadratae rationali adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus sextam [prop. LXV]. latitudines autem, quas significauimus, differunt et a prima et inter se, a prima, quia ea rationalis est, inter se autem, quia ordine non sunt eaedem. ergo etiam ipsae rectae irrationales inter se differunt.

LXXIII.

Si a recta rationali rationalis aufertur potentia tantum toti commensurabilis, reliqua irrationalis est, uocetur autem apotome.

A rationali enim AB rationalis auferatur $B\Gamma$ potentia tantum toti commensurabilis. dico, reliquam $A\Gamma$ irrationalem esse apotomen, quae uocatur.



nam quoniam AB, $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et est $AB : B\Gamma = AB^2 : AB \times B\Gamma$ [prop. XXI lemma], etiam AB^2, $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum AB^2 et $AB^2 + B\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. XV], et $AB \times B\Gamma$, $2\,AB \times B\Gamma$ commensurabilia [prop. VI]. et quoniam est [II, 7]

$$AB^2 + B\Gamma^2 = 2\,AB \times B\Gamma + \Gamma A^2,$$

etiam $A\Gamma^2$, $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XIII, XVI]. uerum $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale est. ergo

mg. m. 2 B. 17. τῷ] τό corr. ex τά m. 1 b. τό] τῷ b. 18. $B\Gamma$] e corr. V. καὶ ἐπειδήπερ τά] τὰ ἄρα Theon (BFVb). 19. ἴσα] ἀσύμμετρα Theon (BFVb). μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓA] om. Theon (BFVb). 20. καί] in ras. V. σύμμετρα B, corr. m. 2. 21. Post $B\Gamma$ add. Theon: ἐπεὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ (τοῦ add. V) ΓA (BFVb).

ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οδ΄.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἀπὸ γαρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητον ποιοῦσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ, ΒΓ μέσαι εἰσίν, μέσα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπο τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἐπεὶ κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

οε΄.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς

---

1. *ἄλογον* in ras. V. *ἐστιν ἄρα* b. *ἐστὶν ἡ ΑΓ*] *καὶ τὸ ἀπὸ τῶν ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ ΑΓ* in ras. m. 2 V. 2. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. BFVb. 3. *οδ΄*] corr. ex *οε΄* F. 6. *περιέχῃ* Theon (BVb, *περιέχει* F). *ἐστι* PBV, comp. Fb. 7. *μέση* V (seq. ras. 1 litt.) et P, corr. m. rec. 10. *ποιοῦσα*] PFVb, *περιέχουσα* B et mg. m. 1 Fb, add. *γρ.* Post *ὅτι* add. *καί* b, m. 2 F. 11. *ἐστι* BV, comp. F. *καλεῖται* P.

$A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem apotome; quod erat demonstrandum.

LXXIV.

Si a recta media aufertur media potentia tantum commensurabilis toti, cum tota autem spatium rationale comprehendens, reliqua irrationalis est; uocetur autem prima apotome mediae.

A media enim AB media auferatur $B\Gamma$ potentia tantum rectae AB commensurabilis, cum AB autem spatium rationale comprehendens $AB \times B\Gamma$ [prop. XXVII]. dico, reliquam $A\Gamma$ irrationalem esse, uocetur autem prima apotome mediae.



nam quoniam AB, $B\Gamma$ mediae sunt, etiam AB^2, $B\Gamma^2$ media sunt. uerum $2\,AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2\,AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt. quare etiam $2\,AB \times B\Gamma$ reliquo [cfr. II, 7] $A\Gamma^2$ incommensurabile est, quoniam, si totum alterutri incommensurabile est, etiam magnitudines ab initio sumptae incommensurabiles erunt [prop. XVI]. uerum $2\,AB \times B\Gamma$ rationale est. quare $A\Gamma^2$ irrationale est. ergo $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem prima apotome mediae.

LXXV.

Si a media media aufertur potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium medium

---

μέση seq. ras. 1 litt. V, supra scr. ς F. 13. *εἰσί* V, comp. Fb. *ἐστί*] m. 2 F. 14. Ante *δέ* del. *τό* P. 15. *ἄρα ἐστί* b. *τῷ* — 16. *ΒΓ*] mg. m. 1 P. 17. ἐστι] corr. ex ἄρα F. *τῶν*] om. P. 21. δέ] δή P. μέση Fb. 22. *ος' F, sed corr.*

ὅλης μέσον περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομη δευτέρα.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομη δευτέρα.

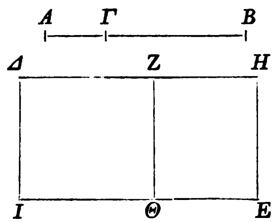
Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ η ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. καὶ ἐπεὶ μέσα καὶ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ,

1. *περιέχῃ* Theon (BFb, *περιέχει* F). *ἐστι* BV, comp. Fb. 2. *μέση* V, P (corr. m. rec.), F (supra scr. *σ* m. 2). 3. *μέση*] supra scr. m. 1 V. *ΓΒ*] e corr. V. 5. *δὲ τῆς*] *δέ* P. 6. *ὅτι ἡ*] *ὅτι καί* V. *ἐστι* PBV, comp. b. 7. *μέση* P (corr. m. rec.), F (corr. m. 2), e corr. V. 8. *ΔΚ* b, et FV, sed corr. 9. *ΔΙ*] *Ι* in ras. B, *ΔΚ* FVb (in V corr.). *ΔΕ*] *Ε* in ras. B. 10. *ΔΗ*] corr. ex *ΗΔ* m. 2 F. 11. *ΔΚ* FVb, sed corr. Ante *ΔΘ* del. *ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ* (corr. ex *ΗΔ* m. 2), *τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ* (supra scr. m. 2) *ἴσον παρὰ τὴν ΔΚ* (corr. ex *ΔΙ*) *παραβεβλήσθω* F. 12. *ΔΖ*] Ζ in ras. F. ΖΕ] ΖΘ F. *ἐστί*] om. F. 13. *καὶ σύμμετρα*] om. Theon (BFVb). *ἐστιν* P. 14. *καί*] (alt.) postea *ins. m. 1 F.* 15. *ΔΙ*] *Δ*K FVb, sed corr. *παράκειται*] *om. b.* Ante *ΔΗ* del. Ζ F. 16. Post ΔΗ del. Ζ F. ΔΙ

comprehendens, reliqua irrationalis est; uocetur autem mediae apotome secunda.

A media enim AB media auferatur ΓB potentia tantum toti AB commensurabilis, cum tota autem AB medium comprehendens $AB \times B\Gamma$ [prop. XXVIII]. dico, reliquam $A\Gamma$ irrationalem esse, uocetur autem mediae apotome secunda.

ponatur enim rationalis ΔI, et quadratis $AB^2 + B\Gamma^2$ aequale rectae ΔI adplicetur ΔE latitudinem efficiens



ΔH, spatio autem $2\,AB \times B\Gamma$ aequale rectae ΔI adplicetur $\Delta\Theta$ latitudinem efficiens ΔZ. itaque reliquum $ZE = A\Gamma^2$ [II, 7]. et quoniam AB^2, $B\Gamma^2$ media sunt et commensurabilia, etiam ΔE medium est.[1]) et rectae rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔH. itaque ΔH rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $AB \times B\Gamma$ medium est, etiam $2\,AB \times B\Gamma$ medium est [prop. XXIII coroll.]. et est $= \Delta\Theta$. itaque etiam $\Delta\Theta$ medium est. et rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔZ. quare ΔZ rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam AB, $B\Gamma$ potentia tantum com-

1) Sequitur ex prop. XV et prop. XXIII coroll. ceterum idem tacite usurpatur p. 226, 13 sq.

ΔK FVb, sed corr. 17. *καί τό* — 18. $B\Gamma$] in ras. F. 18. *ἐστίν*] *ἐστί* PBV, comp. b; cum proximis sustulit rep. in F. 19. *ἐστί* PBV, comp. Fb. ΔK FVb, sed corr. 20. *παράκειται* F. ΔH F, corr. m. 2. 21. ΔH F. $\Delta\Gamma$] ΔK b, et V, sed corr.; corr. ex ΔI m. 2 F.

ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΕ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τὸ ΔΘ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΗΔ, ΔΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστιν. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΙ· τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ

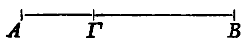
---

1. *ΒΓ*] *ΓΒ* F. *ἀσύμμετρος*] *σύμμετρος* b. 2. *καὶ τῇ* P. 3. *τῆς ΑΒ*] om. b. 4. *ἔστιν* P. 5. *τῷ*] corr. ex *τὸ* m. 1 F. 6. *ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ* (om. V) *τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ* Theon (BFVb). 7. *ὑπό*] *ὑ-* in ras. m. 1 P. *ἴσον* — 8. *ΒΓ*] mg. m. 2 B. 8. *τό*] *τῷ* F. 9. *ἐστί*] om. BFVb. 11. *ΗΔ*] *ΔΗ* P. *ΔΖ*] corr. ex *ΖΔ* V. 12. *εἰσι*] *εἰσιν* B. 13. *ἐστι* BV, comp. Fb. 14. *ΔΙ*] *ΔΚ* FVb,

mensurabiles sunt, AB, $B\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt. itaque etiam AB^2, $AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XXI lemma, prop. XI]. uerum AB^2, $AB^2 + B\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. XV] et $AB \times B\Gamma$, $2\,AB \times B\Gamma$ commensurabilia [prop. VI]. itaque $2\,AB \times B\Gamma$ et $AB^2 + B\Gamma^2$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. est autem $\Delta E = AB^2 + B\Gamma^2$, $\Delta\Theta = 2\,AB \times B\Gamma$. itaque ΔE, $\Delta\Theta$ incommensurabilia sunt. uerum $\Delta E : \Delta\Theta = H\Delta : \Delta Z$ [VI, 1]. itaque $H\Delta$, ΔZ incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque $H\Delta$, ΔZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare ZH apotome est [prop. LXXIII]. uerum ΔI rationalis est. spatium autem recta rationali et irrationali comprehensum irrationale est [prop. XX], et recta ei aequalis quadrata irrationalis est. et $A\Gamma^2 = ZE$. ergo $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem mediae apotome secunda; quod erat demonstrandum.

LXXVI.

Si a recta aufertur recta potentia incommensurabilis toti et cum tota efficiens summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium, reliqua irrationalis est; uocetur autem minor.



A recta enim AB recta auferatur $B\Gamma$ potentia toti incom-

sed corr. 15. ἐστι PV, comp. Fb. ἄρα αὐτό Theon (BFVb). 16. ἐστιν] ἐστι PBV, comp. Fb. ἡ $A\Gamma$] (alt.) m. 2 F. 17. ἐστι PBV, comp. Fb. δέ] δὲ ἐκ F. μέση P, et V, corr. m. 2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 22. δέ F. 23. ἐστι BV, comp. Fb.

δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα τὰ προκείμενα. λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ ἀναστρέψαντι λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἐλάσσων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οζ´.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ προειρημένη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν

---

1. οὖσα ἀσύμμετρος V. τὰ προκείμενα] μετὰ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἅμα μέσον Theon (BFVb). 4. μέν] m. 2 V. ΑΒ] Β in ras. m. 2 P. 5. ΒΓ] ΓΒ P. τετραγώνων] □ eras. V. ἐστι PBV, comp. Fb. δὲ δίς] δ᾽ V. 6. τῶν] m. rec. P. ΑΒ] in ras. m. 1 P. 8. ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ (m. 2 F) τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ (haec 4 uerba om. F) Theon (BFVb). 9. Mg. γρ. ῥητὸν δὲ

mensurabilis et proposita efficiens [prop. XXXIII]. dico, reliquam $A\Gamma$ irrationalem esse minorem, quae uocatur.

nam quoniam $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale est, et $2\,AB \times B\Gamma$ medium, incommensurabilia sunt $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2\,AB \times B\Gamma$. et e contrario reliquo [II, 7] $A\Gamma^2$ incommensurabile est $AB^2 + B\Gamma^2$ [prop. XVI]. uerum $AB^2 + B\Gamma^2$ rationale est. itaque $A\Gamma^2$ irrationale est. ergo $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem minor; quod erat demonstrandum.

LXXVII.

Si a recta aufertur recta potentia incommensurabilis toti, cum tota autem efficiens summam quadratorum mediam, duplum autem rectangulum rationale, reliqua irrationalis est; uocetur autem recta cum rationali totum medium efficiens.

A recta enim AB auferatur recta $B\Gamma$ potentia rectae AB incommensurabilis proposita efficiens [prop. XXXIV]. dico, reliquam $A\Gamma$ irrationalem esse, quam significauimus.

nam quoniam $AB^2 + B\Gamma^2$ medium est, $2\,AB \times B\Gamma$

τὸ συγκείμενον Fb. ἄρα] ἐστι P. 10. ἄλογος — $A\Gamma$] om. P. 11. ὅπερ ἔδει δεῖξαι]. comp. P, om. BFVb. 12. οη′ F. 17. ἐστι PBV, comp. Fb. δὲ ἡ] δέ BFVb. Supra μετά scr. ἀπό comp. m. 1 b. 19. AB] corr. ex $A\Gamma$ m. 2 F. 20. ἀσύμμετρος οὖσα δυνάμει V. τῇ ὅλῃ τῇ Theon (BFVb). τὰ προκείμενα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ ῥητόν Theon (BFVb). 21. ἐστι BV, comp. F. ἡ προειρημένη] καλείσθω (καλεῖται B) δὲ ἡ (om. Vb) μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα Theon (BFVb). 24. ἐστί PBV, comp. Fb.

ΑΒ, ΒΓ ῥητόν, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οη′.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΔΘ [πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ]. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε

2. ΒΓ τετράγωνα BFb. ΒΓ] B m. 2 V. καί] om. P. 3. σύμμετρον F. 4. καί — δίς] ῥητὸν δὲ τό V. ῥητόν] om. V. 6. δὲ ἡ] δέ b. 7. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb, comp. P. 8. οθ′ F. 10. δέ] om. P. 11. τε] in ras. V, μέν BFb. ἀπ᾽] ἀπὸ τῶν V. 12. τε] in ras. V, δέ BFb. 13. καὶ ἔτι] ἔτι τε Theon (BFVb). 14. ἡ] λέγω ὅτι ἡ V. ἐστι BV, comp. Fb. 15. ἡ] om. FVb. 17. τὰ προκείμενα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἔτι τε (om. V, m. 2 F)



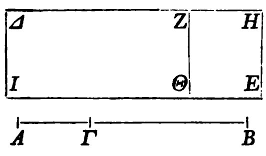
autem rationale, $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2\,AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt. itaque etiam reliquum [II, 7] $A\Gamma^2$ et $2\,AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt [prop. XVI]. et $2\,AB \times B\Gamma$ rationale est. itaque $A\Gamma^2$ irrationale est. ergo $A\Gamma$ irrationalis est [def. 4]; uocetur autem recta cum rationali totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

LXXVIII.

Si a recta aufertur recta potentia incommensurabilis toti, cum tota autem efficiens et summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium praetereaque summam quadratorum duplo rectangulo incommensurabilem, reliqua irrationalis est; uocetur autem recta cum medio totum medium efficiens.

A recta enim AB recta auferatur $B\Gamma$ potentia rectae AB incommensurabilis proposita efficiens [prop. XXXV]. dico, reliquam $A\Gamma$ irrationalem esse, quae uocetur recta cum medio totum medium efficiens.

ponatur enim rationalis ΔI, et quadratis $AB^2 + B\Gamma^2$ aequale rectae ΔI adplicetur ΔE latitudinem efficiens ΔH, spatio autem $2\,AB \times B\Gamma$ aequale auferatur $\Delta\Theta$. itaque reliquum $ZE = A\Gamma^2$ [II, 7]. quare $A\Gamma$ spatio ZE quadrata aequalis est. et quoniam AB^2



τὰ ἀπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AB, $B\Gamma$ Theon (BFVb). 18. ἐστι BV, comp. F. ἡ καλουμένη] καλείσθω δέ Theon (BFVb). 19. μέσον] supra scr. F. 20. ΔI] ΔK in ras. V, item lin. 21. 21. ἴσον] ἴσον τὸ ΔE V. τήν] corr. ex ῥητήν m. 1 P, ῥητὴν τήν V, m. 2 B. τὸ ΔE] om. V. 23. πλάτος — ΔZ] om. P.

ἡ ΔΓ δύναται τὸ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ το συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΕ, μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΕ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ ΔΘ, τὸ ἄρα ΔΘ μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΗΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστίν ἡ ΖΗ· ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΔΓ· ἡ ΔΓ ἄρα ἄλογός ἐστιν· καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

οθ΄.

Τῇ ἀποτομῇ μία [μόνον] προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

---

1. ΑΓ] ΑΓ μεῖζον b. καί] m. 2 F. 3. ἐστί] om. P. 4. ΔΙ] ΔΚ in ras. V, item lin. 5, 8, 9; ΔΗ P. 5. σύμμετρος B, corr. m. 2. 7. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. ἐστίν] ἐστί PBV, comp. Fb. 9. ἐστίν PB. καί] (prius) om. B. 10. ἀσύμμετρός F. ἐστιν P. 11. τό] corr. ex τῷ m. 2 F. τῷ] corr. ex τό m. 2 F. 12. ΔΘ] (alt.) Θ, add. Ζ m. 2, F. ἐστίν PB. καί] om. P. 13. τήν] om. P. ΔΗ] Δ in ras. V, ΗΔ Fb. 14. *ἄρα] m. 2 F.* 15. εἴσιν P. 16. ΖΘ] ΔΚ in ras. V. δέ] δ' P.

$+ B\Gamma^2$ medium est et $= \Delta E$, ΔE medium est. et rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔH. itaque ΔH rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $2 AB \times B\Gamma$ medium est et $= \Delta\Theta$, $\Delta\Theta$ medium est. et rationali ΔI adplicatum est latitudinem efficiens ΔZ. itaque ΔZ rationalis est et rectae ΔI longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2 AB \times B\Gamma$ incommensurabilia sunt, etiam ΔE, $\Delta\Theta$ incommensurabilia sunt. uerum $\Delta E : \Delta\Theta = \Delta H : \Delta Z$ [VI, 1]. itaque ΔH, ΔZ incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque $H\Delta$, ΔZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare ZH apotome est [prop. LXXIII]. $Z\Theta$ autem rationalis est. spatium autem recta rationali et apotome comprehensum irrationale est [prop. XX], et recta ei potentia aequalis irrationalis est. est autem $A\Gamma^2 = ZE$. ergo $A\Gamma$ irrationalis est; uocetur autem recta cum medio totum medium efficiens. quod erat demonstrandum.

LXXIX.

Apotomae una tantum congruit recta rationalis potentia tantum toti commensurabilis.

---

17. ὀρθογώνιον] om. P. ἐστι PBV, comp. Fb. 18. ἐστι PBV, comp. Fb. 19. ἐστι BV, comp. Fb. ἡ] om. P. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 21. οθ'] corr. ex π' m. 2 F. 22. μόνον] om. P, μόνη V et F supra scr. ον m. 1.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφότερα ὑπερέχει· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει [καὶ] τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα. καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ. τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Μία ἄρα μόνη τῇ ἀποτομῇ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

π'.

Τῇ μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος

---

3. *ῥητή*] m. 2 F. 5. *προσαρμοζέσθω* b. *καί*] om. B. 6. *ΔΒ*] *ΒΔ* F. 9. *τῷ ἀπὸ τῆς*] *τό* F. 10. *ΑΒ — ὑπερέχει*] *ἀπ' ἀμφοτέρων ὑπεροχῆς τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ* BFb; in B del. m. 2, mg. *τῷ γὰρ αὐτῷ — ὑπερέχει* m. 2. *ᾧ*] *ὡς* b. 11. *ΑΔ, ΔΒ*] *ΑΓ, ΓΒ* F, corr. m. 2. *ἀπό — 12. ὑπερέχει*] in ras. F. 12. *καί*] om. P. *ΔΒ*] m. 2 F. 14. *ῥητά*] corr. ex *ῥητή* V et *m. rec. B.* *Post γάρ* add. *εἰσιν* FVb, *ἐστιν* B. 15. *τό*] corr. *ex τῷ m. 1 F.* *ἄρα*] om. V. 17. Post *γάρ* add. *εἰσιν* Vb,



Sit AB apotome, ei autem congruens $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII]. dico, nullam aliam rationalem potentia tantum toti commensurabilem rectae AB congruere.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$. itaque etiam $A\Delta$, ΔB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII]. et quoniam

$$(A\Delta^2+\Delta B^2)\div 2A\Delta\times\Delta B=(A\Gamma^2+\Gamma B^2)\div 2A\Gamma\times\Gamma B$$

(nam utrumque excedit eodem spatio AB^2 [II, 7]), permutando erit

$$(A\Delta^2+\Delta B^2)\div(A\Gamma^2+\Gamma B^2)=2A\Delta\times\Delta B\div 2A\Gamma\times\Gamma B.$$

uerum $A\Delta^2+\Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2+\Gamma B^2$ spatio rationali; nam utraque rationalia sunt. itaque etiam $2A\Delta\times\Delta B$ excedit $2A\Gamma\times\Gamma B$ spatio rationali; quod fieri non potest; nam utrumque medium est [prop. XXI], medium autem non excedit medium spatio rationali [prop. XXVI]. itaque rectae AB nulla alia rationalis potentia tantum toti commensurabilis congruit.

Ergo una tantum recta rationalis potentia tantum toti commensurabilis apotomae congruit; quod erat demonstrandum.

LXXX.

Mediae apotomae primae una tantum congruit recta media potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium rationale comprehendens.

ἐστιν BF. 18. τῇ] corr. ex τά m. 2 F. ῥητῆι V. 20. μία — 21. ὅλῃ] bis F, sed corr. 20. μόνον BFb. προσαρμόσει BFVb. 21. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 22. πα΄ F, et sic deinceps. 23. μέσης] corr. ex μέσηι m. rec. P, μέσηι BFV, μέση b. μία] om. b.

οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἔστω γὰρ μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ *ΑΒ*, καὶ τῇ *ΑΒ* προσαρμοζέτω ἡ *ΒΓ*· αἱ *ΑΓ*, *ΓΒ* ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*· λέγω, ὅτι τῇ *ΑΒ* ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ *ΔΒ*· αἱ ἄρα *ΑΔ*, *ΔΒ* μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ*. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ*, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*· τῷ γὰρ αὐτῷ [πάλιν] ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΒ*· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*. τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* [τετραγώνων] ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

3. *μέση* BVb, om. F. 4. *προσαρμόζει* F, corr. m. 2. *αἱ*] corr. ex *εἰ* m. 1 F. *ἄρα ΑΓ, ΓΒ* BFVb. *εἰσίν* B. 5. *σύμμετρος* V, corr. m. 1. 6. *προσαρμόσει* V. 8. *περιέχουσαι* V, corr. m. 1. 10. *ΑΔ*] m. 2 F. *εἰσιν* LB. 12. *τά*] corr. *ex τό m. 2 F.* *τοῦ*] *τῶι* F. *ΑΓ, ΓΒ* F. 13. *ὑπερεῖχε* b, *corr. m. 1.* 14. *τῷ*] corr. ex *τό* V. *πάλιν*] om. P. *ὑπερ-*



Sit enim AB mediae apotome prima, et rectae AB congruat $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes $A\Gamma \times \Gamma B$ [prop. LXXIV]. dico, rectae AB nullam aliam mediam potentia tantum toti commensurabilem congruere cum tota spatium rationale comprehendentem.

nam si fieri potest, etiam ΔB congruat. $A\Delta$, ΔB igitur mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes $A\Delta \times \Delta B$ [prop. LXXIV]. et quoniam est

$$(A\Delta^2 + \Delta B^2) \div 2\, A\Delta \times \Delta B = (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) \div 2\, A\Gamma \times \Gamma B$$

(nam eodem spatio AB^2 excedunt [II, 7]), permutando erit

$$(A\Delta^2 + \Delta B^2) \div (A\Gamma^2 + \Gamma B^2) = 2\, A\Delta \times \Delta B \div 2\, A\Gamma \times \Gamma B.$$

uerum $2\, A\Delta \times \Delta B$ excedit $2\, A\Gamma \times \Gamma B$ spatio rationali; nam utrumque rationale est. itaque etiam $A\Delta^2 + \Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ spatio rationali; quod fieri non potest; nam utraque media sunt [prop. XXIV], medium autem non excedit medium spatio rationali [prop. XXVI].

Ergo mediae apotomae primae una tantum recta media congruit potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium rationale comprehendens; quod erat demonstrandum.

ἔχουσιν LBF. τῷ] τά b. 15. τά] καὶ τά LB. 17. τό] τά P. 18. τὸ δέ — 19. ΓB] καί V. 20. τετραγώνων] om. P. 21. ὑπερέξει P, ξ supra scr. B. 22. δέ] γάρ L. 23. μέση uel μέσῃ LBFVb. 25. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. LBFVb.

πα'.

Τῇ μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόσει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

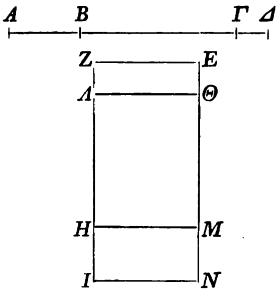
Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΘΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥστε ἡ ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ ΑΓ, ΓΒ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. καί ἐστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν

---

2. *μέση* uel *μέσῃ* LBFVb. *μόνη* V. 5. *μέση* uel *μέσῃ* LBFb, e corr. V. *δευτέρα*] om. b. *ΑΒ*] Β in ras. m. 1 P. *καὶ τῇ ΑΒ*] om. V. 6. *ἡ*] *δὲ ἡ* V. *αἱ*] supra scr. m. rec. b. *εἰσίν* LBP. 7. *τό*] *τά* L? 8. *τῶν*] om. b. *προσαρμόζει* LBb. 11. *ΔΒ* F. *καί*] om. B. 12. *εἰσίν* LB. 16. *ΑΒ, ΒΓ* b. 20. ΕΙ] supra scr. Ζ F. *ἔστιν* L. 21. *καὶ λοιπόν* V. 22. ἴσον — 24. τῷ ΕΗ] mg. m. 1 F.

LXXXI.

Mediae apotomae secundae una tantum recta media congruit potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium medium comprehendens.



Sit AB mediae apotome secunda et rectae AB congruens $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB mediae sunt potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes $A\Gamma \times \Gamma B$ [prop. LXXV]. dico, rectae AB nullam aliam rectam mediam congruere potentia tantum toti commensurabilem, cum tota autem medium comprehendentem.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$. itaque etiam $A\Delta$, ΔB mediae sunt potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes $A\Delta \times \Delta B$ [prop. LXXV]. et ponatur rationalis EZ, et quadratis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ aequale rectae EZ adplicetur EH latitudinem efficiens EM; spatio autem $2\, A\Gamma \times \Gamma B$ aequale auferatur ΘH latitudinem efficiens ΘM. itaque reliquum $E\Lambda = AB^2$ [II, 7]. itaque AB spatio $E\Lambda$ aequalis est quadrata. iam rursus quadratis $A\Delta^2 + \Delta B^2$ aequale rectae EZ adplicetur EI latitudinem efficiens EN. est autem $E\Lambda = AB^2$. itaque reliquum $\Theta I = 2\, A\Delta \times \Delta B$ [II, 7]. et quoniam $A\Gamma$, ΓB mediae sunt, etiam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ media sunt. et $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 = EH$. quare etiam EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens EM. itaque EM rationalis est

---

22. ἐστίν L. Post ἐπεί del. m. 1: ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς P. 23. ἐστίν L, εἰσί Fb. 24. EH] seq. ἴσον ἐστὶ τῷ EH P.

τὴν *ΕΜ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΕΜ* καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΕΖ* μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* μέσον ἐστίν. καί ἐστιν ἴσον τῷ *ΘΗ*· καὶ τὸ *ΘΗ* ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν *ΕΖ* παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν *ΘΜ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ΘΜ* καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΕΖ* μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ *ΑΓ*, *ΓΒ* δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΓ* τῇ *ΓΒ* μήκει. ὡς δὲ ἡ *ΑΓ* πρὸς τὴν *ΓΒ*, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΓ* πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΓ* τῷ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *ΑΓ* σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*. καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἴσον τὸ *ΕΗ*, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἴσον τὸ *ΗΘ*· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΕΗ* τῷ *ΘΗ*. ὡς δὲ τὸ *ΕΗ* πρὸς τὸ *ΘΗ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΕΜ* πρὸς τὴν *ΘΜ*· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΕΜ* τῇ *ΜΘ* μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ *ΕΜ*, *ΜΘ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΕΘ*, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ *ΘΜ*. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ *ΘΝ* αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσ-

---

1. *EM*] (alt.) *EN* L?, *ME* b. 2. *ἐστίν* L. 3. *δὶς ἄρα* V. *ἐστίν*] L, comp. Fb, *ἐστί* PBV. 4. *τῷ ΘΗ*] om. L, m. 2 B. *ἐστίν*] L, comp. Fb, *ἐστί* PBV. 6. *ἐστίν* L. 7. *ΓΒ*] in ras. V. *ἀσύμμετροί* F, sed corr. 9. *ἐστίν* L, *ἄρα ἐστί B.* 10. *ἀσύμμετρον* — 11. *ΓΒ*] m. 2 V. 10. *ἐστὶ καί B.* 11. *ΑΓ*] (prius) φ (non F, habuit B). 12. ἐστιν P.

et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam $A\Gamma \times \Gamma B$ medium est, etiam $2\, A\Gamma \times \Gamma B$ medium est [prop. XXIII coroll.]. et $\Theta H = 2\, A\Gamma \times \Gamma B$. itaque etiam ΘH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ΘM. itaque ΘM rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $A\Gamma$, ΓB potentia tantum commensurabiles sunt $A\Gamma$ et ΓB longitudine incommensurabiles sunt. uerum $A\Gamma : \Gamma B = A\Gamma^2 : A\Gamma \times \Gamma B$ [prop. XXI coroll.]. quare $A\Gamma^2$ et $A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. uerum $A\Gamma^2$, $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ commensurabilia, et $A\Gamma \times \Gamma B$, $2\, A\Gamma \times \Gamma B$ commensurabilia. quare $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$, $2\, A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. est autem $EH = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$, $H\Theta = 2\, A\Gamma \times \Gamma B$. itaque EH, ΘH incommensurabilia sunt. est autem $EH : \Theta H = EM : \Theta M$ [VI, 1]. itaque EM, $M\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. quare EM, $M\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque $E\Theta$ apotome est [prop. LXXIII], ei autem congruens ΘM. iam similiter demonstrabimus, etiam ΘN ei congruere. itaque apotomae rectae diuersae congruunt potentia tantum toti commensurabiles; quod fieri non potest [prop. LXXIX].

Ergo mediae apotomae secundae una tantum recta

---

15. *ἐστιν* P. 17. $H\Theta$] in ras. V. EH] mut. in HE m. 1 V, HE Bb. 18. *τό*] (alt.) om. b. 19. $M\Theta$] in ras. m. 1 B, ΘM P. 20. *ἄρα*] postea ins. m. 1 V. 21. *εἰσι*] om. φ. *σύμμετροι*] -*οι* e corr. P. 23. ΘN] N in ras. V. *προσαρμόττει* V. *ἀποτομῇ τῇ* $E\Theta$ V. 24. *μόνον*] supra scr. m. 1 F. 25. *ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον*] om. V. 26. *μέση* BFVb.

αρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πβ'.

Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἔστω ἡ ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ καὶ ποιοῦσα τὰ μὲν

---

1. εὐθεῖα — μόνον] om. P. 2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 4. πβ'] corr. ex πγ' F. 5. μόνη V, μόν`η F. 9. ἡ] (prius) ins. m. 2 F. 10. ἄρα] supra scr. m. 1 V. σύμμετροι F. 13. τῇ] corr. ex ἡ m. 2 F. ἑτέραι εὐθεῖαι F. προσαρμόζει b. 14. καί] om. B. αἵ] om. b. 15. Ante εἰσίν ras. 4 litt. V. τά] τό V, et F, corr. m. 2. προειρημένα] μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ (m. 2 F) τετράγωνα (-γώνων FV) ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον

media congruit potentia tantum toti commensurabilis, cum tota autem spatium medium comprehendens; quod erat demonstrandum.

LXXXII.

Rectae minori una tantum recta potentia toti incommensurabilis congruit cum tota efficiens summam quadratorum rationalem, rectangulum autem duplum medium.

Sit AB minor, et rectae AB congruat $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt efficientes



summam quadratorum rationalem, rectangulum autem duplum medium [prop. LXXVI]. dico, rectae AB nullam aliam rectam congruere eadem efficientem.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$. itaque etiam $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sunt efficientes, quae diximus [prop. LXXVI]. et quoniam est [II, 7; cfr. p. 238, 7 sq.]

$$(A\Delta^2+\Delta B^2)\div(A\Gamma^2+\Gamma B^2)=2\,A\Delta\times\Delta B\div2\,A\Gamma\times\Gamma B,$$

et $A\Delta^2+\Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2+\Gamma B^2$ spatio rationali (nam utraque rationalia sunt), etiam $2\,A\Delta\times\Delta B$ excedit $2\,A\Gamma\times\Gamma B$ spatio rationali; quod fieri non potest [prop. XXVI]; nam utrumque medium est.

Ergo rectae minori una tantum recta congruit potentia toti incommensurabilis et cum tota efficiens

---

Theon (BFVb). 16. *τά*] in ras. m. 1 P. 17. *τό*] *τά* B; *τῷ* F, sed corr. m. 1. 18. *ὑπό — δέ*] mg. m. 2 B. *τοῦ — 19. ΔB*] e corr. m. 1 F. 19. *AΔ*] *Δ* e corr. m. 1 V. 20. *ὑπερέχει*] m. 2 B. *εἰσιν* b. 21. *ἄρα*] m. 2 B, om. FVb. 23. *ἔστιν*] m. 2 F. 24. *ἄρα*] om. P. Ante *μία* del. *τῇ AB* m. 2 V. *μόνη* V. 25. *δυνάμει μόνον* FVb. *σύμμετρος* FVb, et B, corr. m. 2. *καί*] om. V. *τά*] *τό* PFV.

ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πγ΄.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ *ΑΒ*, καὶ τῇ *ΑΒ* προσαρμοζέτω ἡ *ΒΓ*· αἱ ἄρα *ΑΓ*, *ΓΒ* δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω, ὅτι τῇ *ΑΒ* ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ *ΒΔ*· καὶ αἱ *ΑΔ*, *ΔΒ* ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προκείμενα. ἐπεὶ οὖν, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἀκολούθως τοῖς πρὸ αὐτοῦ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα. οὐκ ἄρα τῇ *ΑΒ* ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα

1. *τετράγωνον* P, *τετραγώνων* V, et F, corr. m. 2. Post *ῥητόν* add. *μετὰ τῆς ὅλης* V. 2. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. BFVb. 3. *πδ΄* F. 4. *μετὰ τοῦ* V. Post *ῥητοῦ* add. *καί* m. 2 F. 5. *μόνη* V. 10. *καὶ τῇ ΑΒ*] om. B. *προσαρμόζουσα* Vb, *προσαρμόζουσα δέ* B, *ἁρμόζουσα* F. 11. *τὰ προκείμενα*] *τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν* ΑΓ, ΓΒ *ῥητόν* Theon

summam quadratorum rationalem, rectangulum autem duplum medium; quod erat demonstrandum.

LXXXIII.

Rectae cum rationali totum medium efficienti una tantum recta congruit potentia toti incommensurabilis, cum tota autem summam quadratorum mediam efficiens, rectangulum autem duplum rationale.

Sit AB recta cum rationali totum medium efficiens, et rectae AB congruat $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt proposita efficientes [prop. LXXVII].



dico, rectae AB nullam aliam congruere eadem efficientem.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$. itaque etiam $A\Delta$, ΔB rectae potentia incommensurabiles sunt proposita efficientes [prop. LXXVII]. iam quoniam, sicut in priore propositione [p. 246, 16 sq.]

$$(A\Delta^2+\Delta B^2)\div(A\Gamma^2+\Gamma B^2)=2A\Delta\times\Delta B\div 2A\Gamma\times\Gamma B,$$

et $2A\Delta\times\Delta B$ excedit $2A\Gamma\times\Gamma B$ spatio rationali (nam utrumque rationale est), etiam $A\Delta^2+\Delta B^2$ excedit $A\Gamma^2+\Gamma B^2$ spatio rationali; quod fieri non potest; nam utraque media sunt [prop. XXVI]. itaque rectae AB nulla alia recta congruet potentia toti incommensurabilis, cum tota autem efficiens, quae dixi-

---

(BFVb). 12. *λέγω — 16. προκείμενα*] om. P. 12. *ταῦτα* V. 14. $A\Delta$] Δ e corr. m. 1 b. 16. *τὰ προκείμενα*] *τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν* $A\Delta$, ΔB *τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν* $A\Delta$, ΔB (AB, $B\Delta$ φ) *ῥητόν* Theon (BFVb). *τά*] corr. ex *τό* F. 18. Post ΓB uacat una linea et spat. 6 litt. b. 21. *ἐστιν*] om. V, m. 2 F. 23. *γάρ εἰσιν* V.

τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προειρημένα· μία ἄρα μόνον προσαρμόσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πδ'.

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνη προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ *ΑΒ*, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ *ΒΓ*· αἱ ἄρα *ΑΓ*, *ΓΒ* δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὰ προειρημένα. λέγω, ὅτι τῇ *ΑΒ* ἑτέρα οὐ προσαρμόσει ποιοῦσα τὰ προειρημένα.

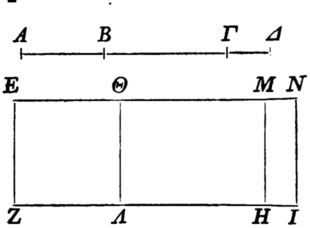
Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ *ΒΔ*, ὥστε καὶ τὰς *ΑΔ*, *ΔΒ* δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τά τε ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ*· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *ΕΖ*, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἴσον παρὰ τὴν *ΕΖ* παραβεβλήσθω τὸ *ΕΗ* πλάτος ποιοῦν τὴν

1. τὰ προειρημένα] τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν Theon (BFVb). 2. μία ἄρα] τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία BVb et F, om. μία. προσαρμόζει Vb, καὶ τὰ ἑξῆς F. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 3. πδ'] sic m. 2 F. 5. μόνον BFb. Post δυνάμει del. μόνον m. 1 P. 8. τό τε] καὶ τό Theon (BFVb). ὑπὸ τῶν b. ἀσύμμετρος F, sed corr. 9. τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν Theon (BFVb). 11. αὐτῇ] om. Theon (BFVb). 12. τὰ προειρημένα] τό τε (μέν F) συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* (ὑπ' αὐτῶν V) μέσον, ἔτι (corr. ex ἐστι F) δὲ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* τετράγωνα (τά add. F) ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ Theon (BFVb).

mus. ergo una tantum congruet; quod erat demonstrandum.

LXXXIV.

Rectae cum medio totum medium efficienti una tantum congruit recta potentia toti incommensurabilis, cum tota autem efficiens summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium praetereaque summae quadratorum incommensurabile.



Sit AB recta cum medio totum medium efficiens, ei autem congruens $B\Gamma$. itaque $A\Gamma$, ΓB potentia incommensurabiles sunt efficientes, quae diximus [prop. LXXVIII]. dico, rectae AB nullam aliam congruere efficientem, quae diximus.

nam si fieri potest, congruat $B\Delta$, ita ut etiam $A\Delta$, ΔB potentia incommensurabiles sint efficientes $A\Delta^2 + \Delta B^2$ medium et $2\, A\Delta \times \Delta B$ medium et praeterea $A\Delta^2 + \Delta B^2$, $2\, A\Delta \times \Delta B$ incommensurabilia [prop. LXXVIII]. et ponatur rationalis EZ, et quadratis $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ aequale rectae EZ adplicetur EH latitudinem efficiens EM, spatio autem $2\, A\Gamma \times \Gamma B$ aequale rectae EZ adplicetur ΘH latitudinem efficiens ΘM.

---

13. Post *προσαρμόσει* add. Theon: *δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης* (BFVb). *προειρημένα*] -ει- in ras. m. 1 P, *προκείμενα* Theon (BFVb). 16. *εἶναι ἀσυμμέτρους* BFV, *εἰσιν ἀσυμμ.* b. *τά τε*] *τό τε* P, *τὰ μέν* BFb, *τό τε συγκείμενον* e corr. V. 17. *ἀπό*] *ἐκ* V. $A\Delta$, ΔB] in ras. V. *τετραγώνων* P et V (supra -*ων* ras. est). *ἅμα*] supra scr. V. *τό*] supra scr. V. 18. *ὑπό* — ΔB] *ὑπ' αὐτῶν* V. *τά*] om. P. 19. Post ΔB del. m. 2 τετράγωνα V. ἀσύμμετρον P. 20. *τοῖς*] corr. ex *τούς* m. 1 V.

ΕΜ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* ἴσον παρὰ τὴν *ΕΖ* παραβεβλήσθω τὸ *ΘΗ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΘΜ*· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* ἴσον ἐστὶ τῷ *ΕΛ*· ἡ ἄρα *ΑΒ* δύναται τὸ *ΕΛ*. πάλιν τοῖς ἀπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* ἴσον παρὰ τὴν *ΕΖ* παραβεβλήσθω τὸ *ΕΙ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΕΝ*. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* ἴσον τῷ *ΕΛ*· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΔ*, *ΔΒ* ἴσον [ἐστὶ] τῷ *ΘΙ*. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* καί ἐστιν ἴσον τῷ *ΕΗ*, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ *ΕΗ*. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν *ΕΖ* παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν *ΕΜ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΕΜ* καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΕΖ* μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* καί ἐστιν ἴσον τῷ *ΘΗ*, μέσον ἄρα καὶ τὸ *ΘΗ*. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν *ΕΖ* παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν *ΘΜ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΘΜ* καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΕΖ* μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ* τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΓ*, *ΓΒ*, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ *ΕΗ* τῷ *ΘΗ*· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ΕΜ* τῇ *ΜΘ* μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα *ΕΜ*, *ΜΘ* ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΕΘ*, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ *ΘΜ*. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ *ΕΘ* πάλιν ἀποτομή ἐστιν, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ *ΘΝ*. τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῇ *ΑΒ* ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα.

---

1. *παρὰ* — 2. *παραβεβλήσθω*] *ἀφῃρήσθω* V. 2. *ΗΘ* B. *ΜΘ* in ras. V, *ΘΝ* F. *λοιπόν* — 6. *ΕΝ*] mg. m. 1 F. 4. *τοῖς μέν* P. 6. *τήν*] bis V. 7. *ἐστί*] *ἐστίν* P, om. FVb, m. 2 B. 9. *τῷ*] *τό* F. *μέσον* — 10. *ΕΗ*] mg. m. 2 V, *om. καί.* 13. *τῷ*] corr. ex *τό* V, *τό* F. *ΘΗ*] *ΗΘ΄* F. 15. *ῥητή* — *ΘΜ*] mg. m. 1 P (ἐστὶ τῇ). 17. ἀσύμμετρον — 18.

itaque reliquum [II, 7] $AB^2 = E\Delta$. quare AB spatio $E\Delta$ aequalis est quadrata. rursus quadratis $A\Delta^2 + \Delta B^2$ aequale rectae EZ adplicetur EI latitudinem efficiens EN. uerum etiam $AB^2 = E\Delta$. itaque reliquum [II, 7]

$$2\,A\Delta \times \Delta B = \Theta I.$$

et quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ medium est, et $A\Gamma^2 + \Gamma B^2 = EH$, etiam EH medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens EM. itaque EM rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. rursus quoniam medium est $2\,A\Gamma \times \Gamma B$, et $2\,A\Gamma \times \Gamma B = \Theta H$, etiam ΘH medium est. et rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ΘM. itaque ΘM rationalis est et rectae EZ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ et $2\,A\Gamma \times \Gamma B$ incommensurabilia sunt, etiam EH, ΘH incommensurabilia sunt. itaque etiam EM, $M\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque EM, $M\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare $E\Theta$ apotome est [prop. LXXIII] et ΘM ei congruens. iam similiter demonstrabimus, rursus $E\Theta$ apotomen esse, ei autem congruentem ΘN. itaque apotomae diuersae rectae congruunt potentia tantum toti commensurabiles; quod demonstratum est fieri non posse [prop. LXXIX]. itaque rectae AB nulla alia recta congruet.

ΘH] mg. m. 1 V. 18. ἄρα ἐστί BFb. ΘH] $H\Theta'$ F. ἐστίν PB. 19. μήκει] om. b. 21. προσαρμόττουσα V. 22. ΘM] $H\Theta$ b, et F, corr. ex $M\Theta$. 23. ἐστι PBV, comp. Fb. 24. καὶ ἄλλη ῥητή B. ῥητή] m. 2 B. 25. ἀδύνατον ἐδείχθη V. 26. Post AB del. εὐθεῖα m. 1 V. προσαρμόζει b.

Τῇ ἄρα *ΑΒ* μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τά τε ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ' αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅροι τρίτοι.

α΄. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη.

β΄. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα.

γ΄. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ΄. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], ἐὰν μὲν ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη.

ε΄. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.

ϛ΄. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

---

1 μόνη V. προσαρμόσει BFV. 3. τά] om. b, τό P. τετράγωνον P. μέσα V. 4. καὶ ἔτι] ἔτι τε BFVb. 5. δίς] om. b. αὐτῶν] eras. B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BV. 6. ὅροι τρίτοι] PV, mg. m. 2 B, om. F; πε΄ b, mg. m. 2 B. numeros om. codd. 7. ἡ] om. B. 8. δύναται φ. ἀσυμμέτρου *BV*, sed corr. 9. ἡ] supra scr. m. 1 b, om. V. 11. εἰ V. 12. καὶ ἡ — 13. ἑαυτῇ] om. Fb, mg. m. 2 B. 12.

Ergo rectae *AB* una tantum congruit recta potentia toti incommensurabilis, cum tota autem efficiens summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium praetereaque summam quadratorum duplo rectangulo incommensurabilem; quod erat demonstrandum.

Definitiones tertiae.

1. Datis recta rationali et apotome, si tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, et tota rationali propositae longitudine commensurabilis est, uocetur apotome prima.

2. Sin congruens rationali propositae longitudine commensurabilis est, et tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, uocetur apotome secunda.

3. Sin neutra rationali propositae longitudine commensurabilis est, et tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, uocetur apotome tertia.

4. Rursus si tota quadrata congruentem excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis, si tota rationali propositae longitudine commensurabilis est, uocetur apotome quarta.

5. Sin congruens ei commensurabilis est, quinta.

6. Sin neutra, sexta.

καί] supra scr. m. 1 V. 13. *δύναται* PV. Post *καλείσθω* ras. 2 litt. V. 15. *εἰ* V. 16. *ἡ δὲ ὅλη* — 17. *ἑαυτῇ*] om. Fb, m. 2 B. 16. *δύναται* V. 19. *ἡ*] m. 2 B. *τῆι προσαρμοζούσηι* B, sed corr. (ante *τῆι* ras. 1 litt.). 20. συμμέτρου B, corr. m. 2. *μήκει*] om. P. μέν] supra scr. m. 1 F. 21. *ἡ*] *m. 2 B.* 24. -*ρα ἕ*- in ras. m. 1 P.

πε'.

Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΖΔ μὴ ἔστω τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ.

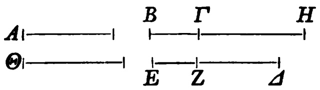
---

1. πε'] om. BFb. 3. ῥητή] m. 2 B. μήκει] om. V. 4. ἔστω] ἔσται F, corr. m. 1; ἔστω μήκει V. ἐστίν P. ΒΗ] corr. ex ΗΒ V. 5. ἡ] m. 2 F. 6. ΔΖ BVb. οὐκ FV. 7. ΔΖ] "ΖΔ' F. 8. πεποιείσθω F. ὁ] m. 2 F. 10. τετράγωνον] om. V. σύμμετρος V, corr. m. 1. ἐστίν V. 11. ΗΒ F. ΗΓ] supra scr. Θ b; ΘΓ F, sed corr. (?). ῥητόν — ΒΗ] m. 2 B. 13. ΗΓ] in ras. V, corr. ex ΓΔ m. 1 b. 14. ἀριθμός] om. V. ἀριθμόν] om. V. οὐδέ

LXXXV.

Inuenire apotomen primam.

Ponatur rationalis A, et rectae A longitudine commensurabilis sit BH. itaque etiam BH rationalis est. et ponantur duo numeri quadrati ΔE, EZ, quorum differentia $Z\Delta$ quadratus numerus ne sit [prop. XXVIII lemma I]. itaque



$E\Delta : \Delta Z$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. et fiat $E\Delta : \Delta Z = BH^2 : H\Gamma^2$ [prop. VI coroll.]. itaque BH^2, $H\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum BH^2 rationale est. itaque etiam $H\Gamma^2$ rationale est. quare etiam $H\Gamma$ rationalis est. et quoniam $E\Delta : \Delta Z$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne BH^2 quidem ad $H\Gamma^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BH, $H\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt. et utraque rationalis est. itaque BH, $H\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commmensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem primam esse.

sit enim $\Theta^2 = BH^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma]. et quoniam est

$$E\Delta : Z\Delta = BH^2 : H\Gamma^2,$$

etiam conuertendo [V, 19 coroll.] est

$$\Delta E : EZ = HB^2 : \Theta^2.$$

uerum $\Delta E : EZ$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; nam uterque quadratus

FVb. 15. ἄρα] supra scr. m. 1 V. $H\Gamma$] e corr. V. 17. BH] HB φ. 18. εἰσιν P. 19. ἐστι V, comp. b, εἰσι comp. φ. 22. Θ] in spat. 2 litt. φ. $E\Delta$] ΔE V. 23. τόν] τό b. ΔZ BVb. 24. ΔE] in ras. m. 1 P.

ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστιν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει εὑρεῖν.

πϛ'.

Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετράγωνον. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ. ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα

1. ΕΖ] in ras. V. Post λόγον del. οὐκ F. 2. τετράγωνος] τετράγωνον F, sed corr. 3. ἐστι PBV, comp. Fb. ἄρα] om. φ. 4. Θ] ΗΘ b. 5. ΒΗ] ΗΒ P. 6. τῆς] τῇ b. 7. Θ. ἡ] ΘΗ b; ΗΘ. ἡ F. 8. ἀσυμμέτρου P, et eras. ἀ- V. ἡ] (prius) om. BVb. 9. μήκει] om. F. τῇ Α μήκει BV. 13. πϛ') om. F, in figura πε'. 14. τήν] supra scr. m. 1 P. 15. ἀσύμμετρος P, corr. m. rec.; σύμμετρος ἔστω V. 16. ἐστὶν

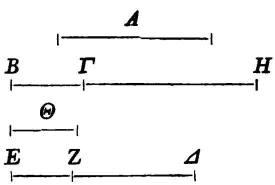
est. itaque etiam $HB^2 : \Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare BH, Θ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. est autem $BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2$. itaque BH quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. et tota BH rationali propositae $\varDelta$ commensurabilis est. itaque $B\Gamma$ apotome prima est [deff. tert. 1].

Ergo inuenta est $B\Gamma$ apotome prima; quod erat inueniendum.

LXXXVI.

Inuenire apotomen secundam.

Ponatur rationalis $\varDelta$ et rectae $\varDelta$ longitudine commensurabilis $H\Gamma$. itaque $H\Gamma$ rationalis est. et ponantur duo numeri quadrati $\varDelta E, EZ$, quorum differentia $\varDelta Z$ numerus quadratus ne sit [prop. XXVIII lemma I]. et fiat $Z\varDelta : \varDelta E = \Gamma H^2 : HB^2$ [prop. VI coroll.]. itaque ΓH^2, HB^2 commensurabilia sunt [prop. VI] uerum ΓH^2 rationale est. quare etiam HB^2 rationale est. itaque etiam BH rationalis est. et quoniam $H\Gamma^2 : HB^2$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ΓH et HB longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. itaque $\Gamma H, HB$



καὶ ἡ P. 17. τετράγωνοι] om. F, ins. m. 2 ante δύο. ὁ] ἡ V. 18. πεποιείσθω F. $\varDelta Z$ FVb. 20. σύμμετρος P, corr. m. rec. 21. τετραγώνῳ] om. V. 22. ἐστί] om. BFVb. 25. ἐστιν] ἄρα ǂ ἐστιν (sic) b, ἄρα ἐστίν V; ἄρα add. m. 2 F. HB] BH BF. 26. μήκει] e corr. V. HB] B e corr. V. ἄρα] om. Pφ.

ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. καί ἐστιν ἑκάτερος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρος τῇ Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εὕρηται ἄρα δευτέρα ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πζ´.

Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς

2. *ἐστι* PBV, comp. Fb. 3. *δή*] om. V. 6. *ἀριθμός*] om. V. 7. *ἀριθμόν*] om. V. 8. *οὕτως*] *ϡ τῶν* (corr. ex *τό*) F. *ὁ*] supra scr. F. *ΔΕ*] *ΕΔ* F. 12. *ἐστίν*] *ἐστὶ μήκει* V. *μήκει*] om. FVb, m. 2 B. *καὶ δύναται*] m. 2 supra scr. B, *-ύνα-* in ras. V, *καί ἐστιν* Fb, B m. 1. 13. *μείζων* Fb et B, sed corr. m. 2; seq. ras. 6 litt. V. *τῷ*] in ras. m. 1 B, *τοῦ* b. *τῆς*] om. V. *ἡ ΒΗ* — 14. *συμμέτρου*] mg. *m. 1 V* (*συμμέτρου* etiam in textu). 14. *ἀσυμμέτρου* b, corr. *m. rec.* 15. *σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ* Theon (BFVb).

rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem secundam esse.

sit enim $\Theta^2 = B\Gamma^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma]. iam quoniam est

$$BH^2 : H\Gamma^2 = E\Delta : \Delta Z,$$

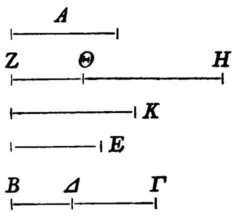
conuertendo [V, 19 coroll.] erit $BH^2 : \Theta^2 = \Delta E : EZ$. et uterque ΔE, EZ quadratus est. itaque $BH^2 : \Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BH, Θ longitudine commensurabiles sunt [prop. IX]. et $BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2$. quare BH quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis. et congruens ΓH rationali propositae A commensurabilis est. itaque $B\Gamma$ apotome est secunda [deff. tert. 2].

Ergo inuenta est apotome secunda $B\Gamma$; quod erat demonstrandum.

LXXXVII.

Inuenire apotomen tertiam.

Ponatur rationalis A, et ponantur tres numeri E, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ rationem inter se non habentes, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ΓB autem ad $B\Delta$ rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, et fiat $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$ [prop. XXVIII lemma I], et $B\Gamma : \Gamma\Delta = ZH^2 : H\Theta^2$. iam quon-



16. μήκει τῇ A Bb, τῇ A μήκει V. ἄρα] ἄρα ῥητή F. ἐστιν PB. 17. ἄρα ἡ V. $B\Gamma$] φ (de F non liquet). ὅπερ ἔδει δεῖξαι] φ et comp. P, ὅπερ ἔδει εὑρεῖν V, om. Bb. 19. πϛ′ F (euan.). 21. ἡ ῥητὴ ἡ P. 22. ΓΔ] corr. ex Δ m. 2 F. 24. ΓB] corr. ex $\Gamma\Delta$ m. rec. b.

πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ *ΒΓ* πρὸς τὸν *ΓΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τετράγωνον, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΗ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *Α* τῇ *ΖΗ* μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ *ΒΓ* πρὸς τὸν *ΓΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΗΘ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *ΒΓ* πρὸς τὸν *ΓΔ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΗ* τῇ *ΗΘ* μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ *ΖΗ*, *ΗΘ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΘ*.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*, ὡς

1. *πεποιείσθω* F. 4. ΖΗ] corr. ex *ΑΗ* F. 6. *Α τετράγωνον*] *Α* V. 7. *ἐστί*] om. V. τετράγωνον] om. V. 8. τε-

iam est $E : B\Gamma = \Delta^2 : ZH^2$, Δ^2 et ZH^2 commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum Δ^2 rationale est. itaque etiam ZH^2 rationale est. quare ZH rationalis est. et quoniam $E : B\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne Δ^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque Δ, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. rursus quoniam est

$$B\Gamma : \Gamma\Delta = ZH^2 : H\Theta^2,$$

ZH^2 et $H\Theta^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum ZH^2 rationale est; itaque etiam $H\Theta^2$ rationale est. quare $H\Theta$ rationalis est. et quoniam $B\Gamma : \Gamma\Delta$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ZH, $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. itaque ZH, $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $Z\Theta$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem tertiam esse.

nam quoniam est $E : B\Gamma = \Delta^2 : ZH^2$, $B\Gamma : \Gamma\Delta = ZH^2 : \Theta H^2$, ex aequo [V, 22] $E : \Gamma\Delta = \Delta^2 : \Theta H^2$.

τραγώνῳ] om. V. δέ] ἐστι, add. δέ m. 2, V. 9. τετράγωνον] om. V. 12. οὐδέ b. 13. τετράγωνον] om. P. 15. τῇ] corr. ex τῆς B, τῆς F. 16. τόν] om. B. 17. $H\Theta$] e corr. F. 18. τῷ] πρὸς τό Fb. ῥητόν — ZH] mg. m. 1 V. 19. ἄρα καί] in ras. V. ῥητή — $H\Theta$] mg. m. 1 F. ἐστίν] om. b. 21. οὐδέ b. 22. τό] (alt.) supra scr. m. 1 F. $H\Theta$] H eras. V. 24. ZH] HZ F. 25. αἵ — εἰσι] mg. m. 2 B, in textu αἵ εἰσι. εἰσιν P. 27. τρίτη] corr. ex ῥητή m. 1 P. 28. οὕτω B.

δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ. ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει. οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΒΓ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. σύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει, καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πη'.

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν

1. τόν] om. P. οὕτω B. 3. ΘΗ] corr. ex ΗΘ V. 4. τὸν ΓΔ] corr. ex Γ m. 2 F. 9. ἐστιν V. 11. ΒΓ] ras. 2

uerum $E:\Gamma\Delta$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; itaque ne A^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare A, $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. itaque neutra rectarum ZH, $H\Theta$ rationali propositae A commensurabilis est longitudine. iam sit $ZH^2 \div H\Theta^2 = K^2$ [prop. XIII lemma]. quoniam igitur est $B\Gamma:\Gamma\Delta = ZH^2:H\Theta^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] est $B\Gamma:B\Delta = ZH^2:K^2$. uerum $B\Gamma:B\Delta$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque etiam $ZH^2:K^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ZH, K longitudine commensurabiles sunt [prop. IX], et ZH quadrata excedit $H\Theta$ quadrato rectae sibi commensurabilis. et neutra rectarum ZH, $H\Theta$ rationali propositae A longitudine commensurabilis est. itaque $Z\Theta$ apotome est tertia [deff. tert. 3].

Ergo inuenta est apotome tertia $Z\Theta$; quod erat demonstrandum.

LXXXVIII.

Inuenire apotomen quartam.

Ponatur rationalis A et rectae A longitudine commensurabilis BH. itaque etiam BH rationalis est.

---

litt. V, corr. ex *BE* F. *τόν*] om. P. *ΓΔ*] eras. V, corr. ex *ΓΓ* m. 1 b. 12. *τό*] (alt.) supra scr. m. 1 b. 13. *ΒΓ*] corr. ex *ΓΒ* V. 15. *πρός*] *πρόν* P. 16. *ἄρα*] supra scr. F. 19. *τῇ Κ — ἡ ΖΗ*] mg. m. 1 P. Post *μεῖζον* add. Theon: *τῷ ἀπὸ τῆς Κ. ἡ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται* (BVb, F mg. m. 1). 23. *ἡ*] om. FV. *τρίτη*] om. F. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. Bb. 24. *δεῖξαι*] εὑρεῖν V φ. 25. πζ F, et sic deinceps. 27. μήκει b. 28. ἄρ P, corr. m. 2. *ἐστίν* PBV. *καί*] (prius) corr. ex κα P, om. FV.

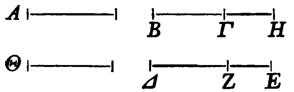
δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΕΖ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ.

[Λέγω δή, ὅτι καὶ τετάρτη].

Ὧι οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΒΗ

---

2. ΕΖ] eras. V.* μή] om. φ. 4. τόν] mg. m. 1 P. 5. πρός] om. φ. ΗΓ] ΒΓ supra scr. Η b. ἐστίν P, et V del. v. 8. ἐστίν] ἐστὶ καί FV. 9. πρὸς — 10. τῆς (prius)] om. φ lacuna relicta. 9. ἀριθμόν] om. V. 10. οὐδέ b. 11. ἀριθμός] om. V. ἀριθμόν] om. V. 12. ἐστίν] om. FV.



et ponantur duo numeri ΔZ, ZE, ita ut totus ΔE ad utrumque ΔZ, EZ rationem non habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. et fiat $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$ [prop. VI coroll.]. itaque BH^2, $H\Gamma^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum BH^2 rationale est. itaque etiam $H\Gamma^2$ rationale est. quare $H\Gamma$ rationalis est. et quoniam $\Delta E : EZ$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne BH^2 quidem ad $H\Gamma^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare BH, $H\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. itaque BH, $H\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop. LXXIII]. iam sit $\Theta^2 = BH^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma]. quoniam igitur est $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$, etiam conuertendo [V, 19 coroll.] est $E\Delta : \Delta Z = BH^2 : \Theta^2$. uerum $E\Delta : \Delta Z$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne BH^2 quidem ad Θ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare BH, Θ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. est autem $BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2$. itaque BH quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi

---

BH] *μη φ*. *μήκει*] om. FV. *καί* — 13. *ῥηταί*] mg. m. 1 V. 13. *εἰσιν* P. 14. *σύμμετρον οὐκ φ*. *BΓ*] *B* e corr. φ, *BH* P. 15. *λέγω* — *τετάρτη*] om. PB, *καί φ*. *δή*] om. V. 17. *ἔστιν*] om. V. 18. *πρὸς τὸν EZ*] *τοῦ ἀπὸ τῆς EZ* b, corr. mg. m. 1. *πρὸς τό*] *τοῦ* b. 19. *HΓ*] *H* in ras. m. 1 B. *ἀναστρέψαι φ*. 20. *τόν*] om. P, *τό* b. *BH* V. 21. *EΔ*] *Δ* in ras. m. 1 B. 22. *οὐδέ* Vb. 24. ἀριθμόν] om. V. *ἄρα*] in ras. V. 25. *BH*] (alt.) mut. in HB V, HB BFb. 27. *συμμέτρου* b, corr. m. rec. ἑαυτῇ μήκει B. ἡ ὅλη ἡ V.

σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τετάρτη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

πθ'.

Εὑρεῖν την πέμπτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΓΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ, ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς τὸν ΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν

---

1. ΒΓ ἄρα B. 2. ἐστιν P. 3. ἡ] καὶ ἡ F, ἡ ΒΓ B. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 7. ἐστίν] om. P. 8. ΖΕ] ΕΖ F. ΔΕ] ΑΕ in ras. V. 9. τῶν] τόν φ. πάλιν] om. Fb. 10. πεποιείσθω F. 11. τόν] om. P. 12. Post *ΗΒ* add. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ (ΓΗ V) τῷ ἀπὸ

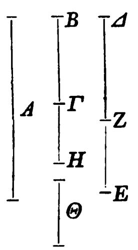
incommensurabilis. et tota BH rationali propositae A commensurabilis est longitudine. itaque $B\Gamma$ apotome est quarta [deff. tert. 4].

Ergo inuenta est quarta apotome; quod erat demonstrandum.

LXXXIX.

Inuenire apotomen quintam.

Ponatur rationalis A, et rectae A longitudine commensurabilis sit ΓH. itaque ΓH rationalis est. et



ponantur duo numeri ΔZ, ZE, ita ut ΔE rursus ad neutrum numerorum ΔZ, ZE rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. et fiat $ZE : E\Delta = \Gamma H^2 : HB^2$. itaque etiam HB^2 rationale est [prop. VI]. quare etiam BH rationalis est. et quoniam est $\Delta E : EZ = BH^2 : H\Gamma^2$, et $\Delta E : EZ$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne BH^2 quidem ad $H\Gamma^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque BH, $H\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. quare BH, $H\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $B\Gamma$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem quintam esse.

sit enim $\Theta^2 = BH^2 \div H\Gamma^2$ [prop. XIII lemma]. quoniam igitur est

$$BH^2 : H\Gamma^2 = \Delta E : EZ,$$

τῆς BH. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓH b, mg. FV. ῥητόν — HB] mg. V. ἄρα — 13. ῥητῇ] om. P. 15. $H\Gamma$] Γ in ras. V. 16. οὐδ' ἄρα] οὐδέ P. 18. τετράγωνον] τετράγωνος b, sed corr. 21. ἐστι BV, comp. Fb. 25. $H\Gamma$ — p. 270, 1. EZ] in ras. F.

ΕΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ *ΕΔ* πρὸς τὸν *ΔΖ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Θ*. ὁ δὲ *ΕΔ* πρὸς τὸν *ΔΖ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΒΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Θ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΒΗ* τῇ *Θ* μήκει. καὶ δύναται ἡ *ΒΗ* τῆς *ΗΓ* μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς *Θ*· ἡ *ΗΒ* ἄρα τῆς *ΗΓ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ *ΓΗ* σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ *Α* μήκει· ἡ ἄρα *ΒΓ* ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ *ΒΓ*· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛ΄.

Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *Α* καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ *Ε*, *ΒΓ*, *ΓΔ* λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ *ΓΒ* πρὸς τὸν *ΒΔ* λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Α* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*, ὡς δὲ ὁ *ΒΓ* πρὸς τὸν *ΓΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Α* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *Α* τῷ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *Α*· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ

1. *ἀναστρέψαντι* — 2. ΕΔ] e corr. F. 1. *ἐστίν*] om. BFb. ΕΔ] *ΔΕ* P. 4. *ΗΒ* F. 7. Θ] *ΗΘ* F. *ΒΗ*] *ΗΒ* BFV. *μεῖζον*] om. P. 8. *ἄρα ΗΒ* V. *ΒΗ* P. *δύναται*] om. V. 9. *ἀσυμμέτρου*] *ἀ-* in ras. V, m. 2 B. *ἑαυτῇ δύναται* V. 10. Post *ΓΗ* eras. *καὶ ἀ-* V. 11. *ΒΓ ἄρα* b.

conuertendo [V, 19 coroll.] est $E\varDelta : \varDelta Z = BH^2 : \Theta^2$. uerum $E\varDelta : \varDelta Z$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne BH^2 quidem ad Θ^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare BH, Θ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. est autem

$$BH^2 \div H\Gamma^2 = \Theta^2.$$

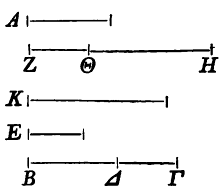
itaque HB quadrata excedit $H\Gamma$ quadrato rectae sibi incommensurabilis. et congruens ΓH rationali propositae A longitudine commensurabilis est. itaque $B\Gamma$ apotome est quinta [deff. tert. 5].

Ergo inuenta est apotome quinta $B\Gamma$; quod erat demonstrandum.

XC.

Inuenire apotomen sextam.

Ponatur rationalis A et tres numeri E, $B\Gamma$, $\Gamma\varDelta$ inter se rationem non habentes, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; et praeterea ne ΓB quidem ad $B\varDelta$ rationem habeat, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. et fiat $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$, $B\Gamma : \Gamma\varDelta = ZH^2 : H\Theta^2$.



iam quoniam est $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$, erunt A^2, ZH^2 commensurabilia [prop. VI]. uerum A^2 rationale est. itaque etiam ZH^2 rationale est. quare etiam

12. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 16. συγκείσθω B, corr. m. 2. Post E eras. B F. 18. ΓB] supra add. $\Gamma\varDelta$ B; $B\Gamma$ V. 19. $B\varDelta$] corr. ex $B\Gamma$ m. rec. P. 20. πεποήσθω P, sed corr.; πεποιείσθω F. μὲν ὁ] ὁ μέν V. 22. τόν] om. B. 23. $H\Theta$] ΘH b. 26. ῥητόν — 27. ZH] mg. V. 27. καί] ἐστι καί BFb. ἐστίν PB.

ἡ *ΖΗ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *Α* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *Α* τῇ *ΖΗ* μήκει. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ *ΒΓ* πρὸς τὸν *ΓΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ *ΗΘ*. καὶ ἐπεὶ ὁ *ΒΓ* πρὸς τὸν *ΓΔ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΗ* τῇ *ΗΘ* μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ *ΖΗ*, *ΗΘ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα *ΖΘ* ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΒΓ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Α* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ*, ὡς δὲ ὁ *ΒΓ* πρὸς τὸν *ΓΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΗ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ *Ε* πρὸς τὸν *ΓΔ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *Α* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ*. ὁ δὲ *Ε* πρὸς τὸν *ΓΔ* λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *Α* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΗΘ* λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *Α* τῇ *ΗΘ* μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν *ΖΗ*, *ΗΘ* σύμμετρός ἐστι τῇ *Α* ῥητῇ μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστι

---

1. *ΗΖ* P. 3. οὐδέ Vb. 5. ἐστί V. *Α*] *Κ* φ. τῇ] τῆς F. 6. ἡ *ΒΓ* πρὸς τήν B. 7. ἄρα ἐστί V. 11. οὐδέ V. 15. σύμμετροι μόνον V. 16. ἐστι BV, comp. Fb. 17. δή]

ZH rationalis est. et quoniam $E : B\Gamma$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne A^2 quidem ad ZH^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque A, ZH longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. rursus quoniam est

$$B\Gamma : \Gamma\Delta = ZH^2 : H\Theta^2,$$

ZH^2 et $H\Theta^2$ commensurabilia sunt [prop. VI]. uerum ZH^2 rationale est; quare etiam $H\Theta^2$ rationale est. itaque $H\Theta$ rationalis est. et quoniam $B\Gamma : \Gamma\Delta$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, ne ZH^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ZH, $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. et utraque rationalis est. itaque ZH, $H\Theta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $Z\Theta$ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem sextam esse. nam quoniam est $E : B\Gamma = A^2 : ZH^2$, $B\Gamma : \Gamma\Delta = ZH^2 : H\Theta^2$, ex aequo [V, 22] est $E : \Gamma\Delta = A^2 : H\Theta^2$. uerum $E : \Gamma\Delta$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne A^2 quidem ad $H\Theta^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare A, $H\Theta$ longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. ergo neutra rectarum ZH, $H\Theta$ rationali A commensurabilis est longitudine. iam sit $K^2 = ZH^2 \div H\Theta^2$ [prop.

---

supra scr. m. 1 P. 21. *ἐστὶν ἄρα* F. 24. *οὐδ'* — 26. *ἀριθμόν*] mg. m. 2 B. 24. *οὐδ' ἄρα*] *οὐδέ* b. *A*] *A ἄρα* b. 25. *HΘ*] mut. in *ΘH* m. 2 V, *ΘH* b. 27. *οὐδετέρα ἄρα*] *καὶ οὐδετέρα* BVb. 28. *τῇ A ῥητῇ*] τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A b et e corr. F (post *A* del. ῥητῇ). ᾧ] ὡς b. οὖν] οὐ P, corr. m. 2.

τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ, ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ Α. ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϞΑ΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστι πρώτη ἡ ΑΔ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ὅλη ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν

3. ἄρα] om. F. 4. ΓΒ] ΒΓ FB. ΒΔ] supra add. Γ m. 1 b, ΔΒ corr. ex ΒΔ uel ΒΓ V. 5. τῆς] τοῦ φ. 8. ἔχει] οὐκ ἔχει P. 10. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. ἡ] in ras. m. 1 P. 11. συμμέτρου B, corr. m. 2. 13. τῇ Α μήκει V. 14. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. Seq. demonstr.

XIII lemma]. quoniam igitur est $B\Gamma:\Gamma\Delta = ZH^2:H\Theta^2$, conuertendo [V, 19 coroll.] est

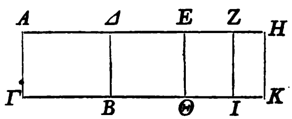
$$\Gamma B : B\Delta = ZH^2 : K^2.$$

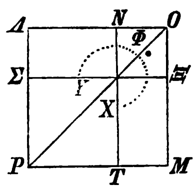
uerum $\Gamma B : B\Delta$ rationem non habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. itaque ne ZH^2 quidem ad K^2 rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. quare ZH, K longitudine incommensurabiles sunt [prop. IX]. est autem $ZH^2 \div H\Theta^2 = K^2$. itaque ZH quadrata excedit $H\Theta$ quadrato rectae sibi incommensurabilis. et neutra rectarum ZH, $H\Theta$ rationali propositae A commensurabilis est longitudine. itaque $Z\Theta$ apotome est sexta [deff. tert. 6].

Ergo inuenta est apotome sexta $Z\Theta$; quod erat demonstrandum.

XCI.

Si spatium comprehenditur recta rationali et apotome prima, recta spatio aequalis quadrata apotome est.





Spatium enim AB rationali $A\Gamma$ et apotome prima $A\Delta$ comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam apotomen esse.

nam quoniam $A\Delta$ apotome est prima, ei congruens sit ΔH. itaque AH, $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop.

alt., u. app. 16. ϛ′ F, ϛβ′ BVb, et sic deinceps. 19. *ἔστι* BV, comp. Fb. 20: *τό*] *τῷ* V. 21. *ἡ*] m. 2 F. 23. γάρ] om. b, m. 2 B. *πρώτη ἐστίν* BFV. 24. AH, HΔ] in ras. m. 2 V. 27. *ἀσυμμέτρου* F, et V, sed corr.

ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει. καί ἐστι ῥητὴ ἡ ΑΓ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΖ, ΖΗ· ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστίν.

Κείσθω δὴ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΛΟΜ τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ περιεχόμενον

1. μέρει] -ερ- in ras. B. τοῦ ἀπό] m. 2 F. 2. τήν] corr. ex τῆς m. 2 F. ΑΗ] Α in ras. F. 3. διαιρεῖ] supra add. μήκει m. 2 V, διελεῖ BF, διέλῃ b. 4. τῷ] τό F. 6. ΖΗ] (alt.) ΗΖ F. 8. ἤχθωσαν] ἤχθω- in ras. m. 1 P. ΖΙ] mut. in ΖΗ m. 2 F. 9. τῇ] τῆς F. 11. ἀλλ' F. ΑΓ] Γ e corr. m. 1 F. 13. ἐστιν P. 14. ΑΙ] ΑΓ P, Ι in ras. V. ἐστιν] ἐστι BV, comp. Fb. 15. καί] (alt.) om. V. 19. ἐστί PBV, comp. Fb. 20. καὶ κείσθω V. 22. ΛΟ, ΟΜ

LXXIII]. et tota ΔH rationali propositae $A\Gamma$ commensurabilis est, et ΔH quadrata excedit $H\Delta$ quadrato rectae sibi longitudine commensurabilis [deff. tert. 1]. itaque si quartae parti quadrati ΔH^2 aequale rectae ΔH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes commensurabiles eam diuidit [prop. XVII]. secetur ΔH in duas partes aequales in E, et quadrato EH^2 aequale rectae ΔH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $\Delta Z \times ZH$. itaque ΔZ, ZH commensurabiles sunt. et per puncta E, Z, H rectae $A\Gamma$ parallelae ducantur $E\Theta$, ZI, HK.

et quoniam ΔZ, ZH longitudine commensurabiles sunt, etiam ΔH utrique ΔZ, ZH commensurabilis est [prop. XV]. uerum ΔH, $A\Gamma$ commensurabiles sunt. quare etiam utraque ΔZ, ZH rectae $A\Gamma$ longitudine commensurabilis est [prop. XII]. et $A\Gamma$ rationalis est. quare etiam utraque ΔZ, ZH rationalis est. itaque etiam utrumque ΔI, ZK rationale est [VI, 1; prop. XI]. et quoniam ΔE, EH longitudine commensurabiles sunt, etiam ΔH utrique ΔE, EH longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum ΔH rationalis est et rectae $A\Gamma$ longitudine incommensurabilis. quare etiam utraque ΔE, EH rationalis est et rectae $A\Gamma$ longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. ergo utrumque $\Delta\Theta$, EK medium est [prop. XX].

ponatur igitur quadratum $\Lambda M = \Delta I$, et spatio ZK aequale auferatur quadratum $N\Xi$ communem angulum habens $\Lambda O M$. itaque quadrata ΛM, $N\Xi$

PF, τῶν ΛO, OM Bb. 23. ἐστι] εἰσι V. τετράγωνα] om. V. 25. τό] in ras. V. τῶν] m. 2 F. περιεχόμενον] -ον in ras. V.

ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς *ΕΗ* τετραγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΑΖ* πρὸς τὴν *ΕΗ*, οὕτως ἡ *ΕΗ* πρὸς τὴν *ΖΗ*. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ *ΑΖ* πρὸς τὴν *ΕΗ*, οὕτως τὸ *ΑΙ* προς τὸ *ΕΚ*, ὡς δὲ ἡ *ΕΗ* πρὸς τὴν *ΖΗ*, οὕτως ἐστὶ τὸ *ΕΚ* πρὸς το *ΚΖ*· τῶν ἄρα *ΑΙ*, *ΚΖ* μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ *ΕΚ*. ἔστι δὲ καὶ τῶν *ΛΜ*, *ΝΞ* μέσον ἀνάλογον τὸ *ΜΝ*, ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καί ἐστι τὸ [μὲν] *ΑΙ* τῷ *ΛΜ* τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ *ΚΖ* τῷ *ΝΞ*· καὶ τὸ *ΜΝ* ἄρα τῷ *ΕΚ* ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν *ΕΚ* τῷ *ΔΘ* ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ *ΜΝ* τῷ *ΛΞ*· το ἄρα *ΔΚ* ἴσον ἐστὶ τῷ *ΥΦΧ* γνώμονι καὶ τῷ *ΝΞ*. ἔστι δὲ καὶ τὸ *ΑΚ* ἴσον τοῖς *ΛΜ*, *ΝΞ* τετραγώνοις· λοιπὸν ἄρα τὸ *ΑΒ* ἴσον ἐστὶ τῷ *ΣΤ*. τὸ δὲ *ΣΤ* τὸ ἀπὸ τῆς *ΛΝ* ἐστι τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς *ΛΝ* τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ *ΑΒ*· ἡ *ΛΝ* ἄρα δύναται τὸ *ΑΒ*.

Λέγω δή, ὅτι ἡ *ΛΝ* ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν *ΑΙ*, *ΖΚ*, καί ἐστιν ἴσον τοῖς *ΛΜ*, *ΝΞ*, καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν *ΛΜ*, *ΝΞ* ῥητόν ἐστιν, τουτέστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν *ΛΟ*, *ΟΝ*· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν *ΛΟ*, *ΟΝ* ῥητή ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ *ΔΘ* καί ἐστιν ἴσον τῷ *ΛΞ*, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ *ΛΞ*. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν *ΛΞ* μέσον ἐστίν, τὸ δὲ *ΝΞ* ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΛΞ* τῷ *ΝΞ*· ὡς δὲ τὸ *ΛΞ* πρὸς τὸ *ΝΞ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΛΟ* πρὸς τὴν *ΟΝ*· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ

---

2. τήν] (prius) om. P. 6. Post ἀνάλογον ras. 3 litt. V. 7. *ΝΜ* B. 8. μέν] om. BFVb. 9. τό] τῷ b. *ΜΝ*] *ΕΚ* in ras. V. *ΕΚ*] *ΜΝ* in ras. V. ἔστιν ἴσον V. 10. τό] (prius) τῷ V. τῷ] ἴσον ἐστὶ τό V. τῷ *ΔΘ*] in ras. m. 1 P. ἐστιν ἴσον] om. V, ἴσον ἐστίν F. τῷ δὲ *ΜΝ* ἴσον ἐστὶ τὸ *ΛΞ*· ἴσον ἄρα τὸ *ΔΚ* τῷ V. 12. ἴσον] om. V (supra

circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP diametrus eorum, et describatur figura [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam est $\Lambda Z \times ZH = EH^2$, erit [VI, 17] $\Lambda Z : EH = EH : ZH$. uerum $\Lambda Z : EH = \Lambda I : EK$ et $EH : ZH = EK : KZ$ [VI, 1]. itaque EK medium proportionale est inter ΛI, KZ. est autem etiam MN medium proportionale inter ΛM, $N\Xi$, sicuti supra [prop. LIII lemma] demonstratum est, et $\Lambda I = \Lambda M$, $KZ = N\Xi$. itaque etiam $MN = EK$. est autem $EK = \Delta\Theta$, $MN = \Lambda\Xi$ [I, 43]. itaque $\Delta K = \Upsilon\Phi X + N\Xi$. uerum etiam $\Lambda K = \Lambda M + N\Xi$. itaque reliquum $AB = \Sigma T$. est autem $\Sigma T = \Lambda N^2$. quare $\Lambda N^2 = AB$. ergo ΛN quadrata spatio AB aequalis est.

Iam dico, ΛN apotomen esse.

nam quoniam utrumque ΛI, ZK rationale est, et

$$\Lambda I = \Lambda M, \quad ZK = N\Xi,$$

etiam utrumque ΛM, $N\Xi$, hoc est ΛO^2, ON^2, rationale est. quare etiam utraque ΛO, ON rationalis est. rursus quoniam $\Delta\Theta$ medium est, et $\Delta\Theta = \Lambda\Xi$, etiam $\Lambda\Xi$ medium est. iam quoniam $\Lambda\Xi$ medium est, $N\Xi$ autem rationale, $\Lambda\Xi$ et $N\Xi$ incommensurabilia sunt. uerum $\Lambda\Xi : N\Xi = \Lambda O : NO$ [VI, 1]. itaque ΛO, ON longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est; itaque ΛO, ON ra-

---

est ras.). 13. ΣT] corr. ex $B\Gamma$ V. τὸ δὲ ΣT] supra scr. m. 1 P. τό] corr. ex. τῷ FV. 15. ἐστί] postea ins. F. τῷ] τό F. 17. καὶ ἡ P. 19. ἐστι V. ἴσον] ἴσα Bb, om. V. $N\Xi$ ἴσα V. 20. ἐστι BV, comp. Fb. 21. ἐστι PBV, comp. Fb. 23. ἐστί] ἐστίν P, om. V. 24. ἐστίν] ἐστι PBVb, comp. F. 25. $N\Xi$] (prius) corr. ex N K m. 1 b. τό] (tert.) in ras. m. 1 P.

ΔΟ τῇ ΟΝ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΔΟ, ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΝ. καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τὰ ἑξῆς.

ϙβ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ,

---

2. *ΟΝ*] *ΝΟ* e corr. V. *εἴσιν* V, sed *ν* del. 4. *τὸ ΑΒ ἄρα* V. 5. *καὶ τὰ ἑξῆς*] *καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν* Theon (BFVb). 8. *μέση* BFVb et P, sed corr. m. 1. 11. *ΑΔ*] *ΑΒ* b; *δὲ ΑΔ* P, corr. m. 1. 12. *ΑΒ*] corr. ex *ΑΔ* V. *μέση* BFb, et V, corr. m. 2. 14. *ΗΔ*] *ΔΗ* F. *δυναμένη* V, corr. m. 2. 16. *τῆς*] om. F. 17. *ΗΔ*] eras. V. Ante *συμμέτρου* ras. 1 litt. V. 18. *ΑΗ*] *Η* in ras. V. *τῆς*] corr. ex *τῇ* m. 2 V. 19. *τοῦ*]

tionales sunt potentia tantum commensurabiles. quare $\varDelta N$ apotome est [prop. LXXIII]. et quadrata spatio $\varDelta B$ est aequalis. itaque recta spatio $\varDelta B$ aequalis quadrata apotome est.

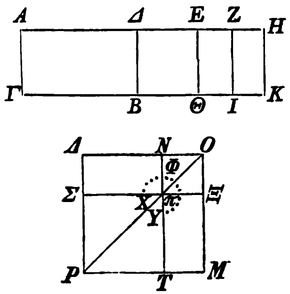
Ergo si spatium comprehenditur recta rationali, et quae sequuntur.

XCII.

Si spatium recta rationali et apotome secunda comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata mediae apotome est prima.

Spatium enim AB recta rationali $A\Gamma$ et apotome secunda $A\varDelta$ comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam mediae apotomen primam esse.

nam $\varDelta H$ rectae $A\varDelta$ congruens sit. itaque AH, $H\varDelta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles



[prop. LXXIII], et congruens $\varDelta H$ rationali propositae $A\Gamma$ commensurabilis est, tota autem AH quadrata excedit congruentem $H\varDelta$ quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine [deff. tert. 2]. iam quoniam AH^2 excedit $H\varDelta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis, si $\frac{1}{4}H\varDelta^2$ aequale rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes commensurabiles eam diuidit [prop. XVII]. iam $\varDelta H$ in puncto E in duas partes aequales secetur. et quadrato EH^2 aequale

$\tau\tilde{\omega}$ b. 20. AH] H e corr. V. 21. διελεῖ Theon (BFVb). Dein add. μήκει V. 22. $\varDelta H$] e corr. m. 2 V. EH] ΘH P.

καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΖ*, *ΖΗ*· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΖ* τῇ *ΖΗ* μήκει. καὶ ἡ *ΑΗ* ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν *ΑΖ*, *ΖΗ* σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ *ΑΗ* καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΑΓ* μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν *ΑΖ*, *ΖΗ* ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΑΓ* μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν *ΑΙ*, *ΖΚ* μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ *ΔΕ* τῇ *ΕΗ*, καὶ ἡ *ΔΗ* ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν *ΔΕ*, *ΕΗ* σύμμετρός ἐστιν. ἀλλ' ἡ *ΔΗ* σύμμετρός ἐστι τῇ *ΑΓ* μήκει [ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν *ΔΕ*, *ΕΗ* καὶ σύμμετρος τῇ *ΑΓ* μήκει]. ἑκάτερον ἄρα τῶν *ΔΘ*, *ΕΚ* ῥητόν ἐστιν.

Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν *ΑΙ* ἴσον τετράγωνον τὸ *ΛΜ*, τῷ δὲ *ΖΚ* ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ *ΝΞ* περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ *ΛΜ* τὴν ὑπὸ τῶν *ΛΟΜ*· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὰ *ΛΜ*, *ΝΞ* τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ *ΟΡ*, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ *ΑΙ*, *ΖΚ* μέσα ἐστὶ καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν *ΛΟ*, *ΟΝ*, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν *ΛΟ*, *ΟΝ* [ἄρα] μέσα ἐστίν· καὶ αἱ *ΛΟ*, *ΟΝ* ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΖ*, *ΖΗ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΕΗ*, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΑΖ* πρὸς τὴν *ΕΗ*, οὕτως ἡ *ΕΗ* πρὸς τὴν *ΖΗ*· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ *ΑΖ* πρὸς τὴν *ΕΗ*, οὕτως τὸ *ΑΙ* πρὸς τὸ *ΕΚ*· ὡς δὲ ἡ *ΕΗ* πρὸς τὴν *ΖΗ*, οὕτως [ἐστὶ] τὸ *ΕΚ* πρὸς τὸ *ΖΚ*· τῶν ἄρα *ΑΙ*, *ΖΚ* μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ

---

1. ἀσύμμετρος b, sed corr. 2. Post μήκει add. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, *Η* σημείων τῇ *ΑΓ* παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, *ΖΙ*, *ΗΚ* (corr. ex *ΖΚ* V). καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ *ΑΖ* τῇ *ΖΗ* μήκει b, V mg. m. 1, F mg., sed euan. 4. ἄρα] om. FV. 6. *ΑΙ*] mut. in *ΑΖ* F, *ΑΖ* b. *ΖΗ* b, et e corr. F. ἐστί BV, comp. Fb. 7. ἡ *ΔΗ*] *ΗΔ* F. 8. ἐστι] m. 2 B. 9. ῥητή — *10. μήκει*] om. P. 9. *ΔΕ*, *ΕΗ*] Ε bis in ras. V. 10. *καὶ ἑκάτερον* b. 11. ἐστι PBV, comp. Fb. 12. τῷ] corr.

rectae AH spatium adplicetur figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ, ZH longitudine commensurabiles sunt. itaque etiam AH utrique AZ, ZH longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum AH rationalis est et rectae $A\Gamma$ longitudine incommensurabilis. itaque etiam utraque AZ, ZH rationalis est et rectae $A\Gamma$ longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. quare utrumque AI, ZK medium est [prop. XX]. rursus quoniam ΔE, EH commensurabiles sunt, etiam ΔH utrique ΔE, EH commensurabilis est [prop. XV].[1]) uerum ΔH, $A\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt. ergo utrumque $\Delta\Theta$, EK rationale est.

iam construatur quadratum $AM = AI$, et spatio ZK aequale auferatur $N\Xi$ in eodem angulo AOM positum, quo AM. itaque quadrata AM, $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam AI, ZK media sunt et $AI = AO^2$, $ZK = ON^2$, etiam AO^2, ON^2 media sunt. quare etiam AO, ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles. et quoniam $AZ \times ZH = EH^2$, erit [VI, 17] $AZ : EH = EH : ZH$. uerum $AZ : EH = AI : EK$

1) Hoc promptius ex prop. VI concludi poterat; nam $\Delta H = 2\,\Delta E = 2\,EH$.

ex ὁ V, τό F. 14. ὃν τῷ AM] e corr. F. τήν] τῷ P. τῶν] om. V. 15. ἔστιν ἄρα V. 17. Post ἐστί add. Theon: καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις (BFVb; in V post καί ras. 1 litt.). ἴσον F. 19. ἄρα] om. P. μέσαι εἰσί V, sed corr. ἐστί PB, comp. Fb. καί] corr. ex δυ- V. αἵ — 20. δυ-] mg. m. 2 V. 19. εἰσί] εἰσὶν λέγω ὅτι καί P. 20. μόνον] eras. V. σύμμετρα V, corr. m. 2. καὶ ἐπεί] ἐπεὶ γάρ P. 21. ἐστί] supra scr. m. 1 F. ἔστιν] corr. ex ἴσον m. 1 F. 23. AI] AH P. 24. ἐστί] om. P. 25. ZK] (alt.) Z corr. ex K m. 1 V.

ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν *ΑΜ*, *ΝΞ* τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ *ΜΝ*· καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν *ΑΙ* τῷ *ΑΜ*, τὸ δὲ *ΖΚ* τῷ *ΝΞ*· καὶ τὸ *ΜΝ* ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ *ΕΚ*. ἀλλὰ τῷ μὲν *ΕΚ* ἴσον [ἐστὶ] τὸ *ΔΘ*, τῷ δὲ *ΜΝ* ἴσον τὸ *ΔΞ*· ὅλον ἄρα τὸ *ΔΚ* ἴσον ἐστὶ τῷ *ΥΦΧ* γνώμονι καὶ τῷ *ΝΞ*. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ *ΑΚ* ἴσον ἐστὶ τοῖς *ΑΜ*, *ΝΞ*, ὧν τὸ *ΔΚ* ἴσον ἐστὶ τῷ *ΥΦΧ* γνώμονι καὶ τῷ *ΝΞ*, λοιπὸν ἄρα τὸ *ΑΒ* ἴσον ἐστὶ τῷ *ΤΣ*. τὸ δὲ *ΤΣ* ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΛΝ*· τὸ ἀπὸ τῆς *ΛΝ* ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ *ΑΒ* χωρίῳ· ἡ *ΛΝ* ἄρα δύναται τὸ *ΑΒ* χωρίον.

Λέγω [δή], ὅτι ἡ *ΛΝ* μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ *ΕΚ* καί ἐστιν ἴσον τῷ *ΛΞ*, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ *ΛΞ*, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν *ΛΟ*, *ΟΝ*. μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ *ΝΞ*· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΛΞ* τῷ *ΝΞ*· ὡς δὲ τὸ *ΛΞ* πρὸς τὸ *ΝΞ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΛΟ* πρὸς *ΟΝ*· αἱ *ΛΟ*, *ΟΝ* ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει. αἱ ἄρα *ΛΟ*, *ΟΝ* μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ *ΛΝ* ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη· καὶ δύναται τὸ *ΑΒ* χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ *ΑΒ* χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϙγ΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀπο-

---

1. *ΕΚ*] *ΕΙ* F. *ΝΞ*] *ΜΝ* F, sed corr. 3. *ΖΚ*] corr. ex *ΚΖ* m. 1 V. 4. τῷ] τό V. ἐστί] om. P. τό] τῷ V. τῷ] τό V. ἴσον ἐστί Bb. 5. τό] (prius) τῷ Vφ. 7. ὧν] ὅν φ. ἐστί] m. 2 F. 8. *ΤΣ*] in ras. V. 9. τὸ δὲ *ΤΣ* ἐστι] τουτέστι B. 10. ἐστίν P. τό] τὸ ἀπὸ τῆς P; τὸ ἀπὸ τῆς *ΛΝ* mg. m. 1 b. 12. δή] om. P. μέση PBFb, μέσης φ, e corr. m. 2 V. ἐστιν P. 13. τὸ *ΕΚ* — 14. τῷ *ΛΞ*] in ras. F. 13. ἐστιν] ἐστι b. Post ἴσον add. τῷ (τό F) *ΝΜ* τουτέστι Fb, m. 2 V.

[VI, 1] et [id.] $EH : ZH = EK : ZK$. quare EK medium est proportionale inter ΛI, ZK. uerum etiam MN medium est proportionale inter ΛM, $N\Xi$ [prop. LIII lemma]. et $\Lambda I = \Lambda M$, $ZK = N\Xi$. quare etiam $MN = EK$. uerum $\Delta\Theta = EK$, $\Lambda\Xi = MN$ [I, 43]. quare $\Delta K = \Upsilon\Phi X + N\Xi$. iam quoniam $\Delta K = \Lambda M + N\Xi$, quorum $\Delta K = \Upsilon\Phi X + N\Xi$, erit reliquum $AB = T\Sigma$. sed $T\Sigma = \Lambda N^2$. itaque $\Lambda N^2 = AB$. ergo ΛN quadrata spatio AB aequalis est.

Iam dico, ΛN mediae esse apotomen primam. nam quoniam EK rationale est, et $EK = \Lambda\Xi$, etiam $\Lambda\Xi$ rationale est, hoc est $\Lambda O \times ON$. demonstrauimus autem, $N\Xi$ medium esse [u. p. 282, 18]. quare $\Lambda\Xi$, $N\Xi$ incommensurabilia sunt. est autem

$$\Lambda\Xi : N\Xi = \Lambda O : ON$$

[VI, 1]. quare ΛO, ON longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. itaque ΛO, ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium rationale comprehendentes. itaque ΛN mediae apotome est prima [prop. LXXIV]. et est $\Lambda N^2 = AB$.

Ergo recta spatio AB aequalis quadrata mediae apotome est prima; quod erat demonstrandum.

XCIII.

Si spatium recta rationali et apotome tertia com-

---

16. *ἐστίν* P. *τῷ* $N\Xi$] m. 2 B. *ὡς δέ*] *καὶ ὡς ἄρα* B. 17. *ἐστίν*] om. V. *πρὸς τήν* FV. *ἄρα* — 18. *μήκει*] *δυνάμει εἰσὶ μόνον σύμμετροι* in ras. V, mg. add. m. rec.: *ἄρα μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· τὰ δὲ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα σύμμετρα· αἱ* ΛO, ON *ἄρα*. 17. *σύμμετροι* F. 19. ΛN] ON b, ΛH F. *μέση* BFVb. 21. *ἡ* — *χωρίον*] om. φ. δυνα-] in spatio 9 litt. F. *μέση* BFb. 22. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb.

τομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

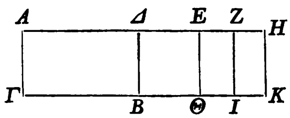
Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα η ΔΗ· αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ, ΖΗ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ὥστε καὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ. ἑκάτερον ἄρα τῶν

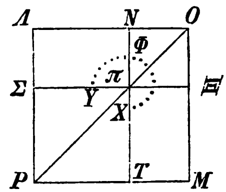
1. *μέση* BFVb. 5. *μέση* BFb, et V, corr. m. 2. *ἔστιν* P. 9. *-αρμοζ-*] in ras. V. 10. *ἀσυμμέτρου* b. 11. *ἐπεί* — 12. *ἑαυτῇ*] punctis notat. V. 11. *ΗΔ*] *ΔΗ* P. 12. *τοῦ*] corr. ex *τῷ* m. 1 b. 14. *διελεῖ μήκει* V. 15. *τῷ*] *τό* φ. 18. *Η*] om. V. *ΖΙ*] mut. in *ΙΖ* V. 19. *εἰσίν*] *εἰ-* e corr. V. 20. *εἰσιν* P. 23. *ὥστε καὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ*] *καὶ ἑκατέρα ἄρα* (supra scr. m. 1 V) *τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καί* Theon (BFVb).

prehenditur, recta spatio aequalis quadrata mediae apotome est secunda.

Spatium enim AB recta rationali $A\Gamma$ et apotome tertia $A\Delta$ comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam mediae apotomen esse secundam.

nam ΔH rectae $A\Delta$ congruens sit. itaque AH, $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et neutra rectarum AH, $H\Delta$ rationali propositae $A\Gamma$ longitudine commensurabilis est, tota autem AH congruentem ΔH excedit quadrato rectae sibi commensurabilis [deff. tert. 3]. quoniam igitur AH^2 excedit ΔH^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, si $\frac{1}{4}\Delta H^2$ aequale rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes commensurabiles eam diuidet [prop. XVII]. iam ΔH in E in duas partes aequales secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. et per puncta E, Z, H rectae $A\Gamma$ parallelae ducantur $E\Theta$, ZI, HK. itaque AZ, ZH commensurabiles sunt. quare AI, ZK commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam AZ, ZH longitudine commensurabiles sunt, etiam AH utrique AZ, ZH longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum AH rationalis est et rectae $A\Gamma$ longitudine incommensurabilis. quare etiam AZ, ZH [prop. XIII]. itaque utrumque AI, ZK medium est [prop. XX]. rursus quoniam ΔE, EH longitudine commen-





ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΗΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. ἀλλ' ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΕΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ.

Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ· καί ἐστιν ἴσον το μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα

---

1. *ἐστίν*] *ἐστί* PBV, comp. Fb. *ἐστιν*] *ἐστι* V. 3. *μήκει*] om. B. *ΔΗ* F, *ΗΔ* in ras. V. 4. *ῥητή* — 5. *μήκει*] m. 2 B. 5. *καὶ ἑκάτερον* V. 6. *ΕΚ*] *ΘΚ* P. *ἐστί* BV, comp. Fb. *δυνάμεις*, ς euan., V. 7. *εἰσὶ σύμμετροι* V. *ἐστίν* V. *μήκει*] om. V. 8. *ΑΗ*] *Η* in ras. V, deinde add. *μήκει* m. 2. *ΗΔ*] ΔΗ P. ἀλλ' — 9. τῇ ΕΗ] mg.

surabiles sunt, etiam ΔH utrique ΔE, EH longitudine commensurabilis est [prop. XV; cfr. p. 283 not.]. uerum $H\Delta$ rationalis est et rectae $A\Gamma$ longitudine incommensurabilis. quare etiam utraque ΔE, EH rationalis est et rectae $A\Gamma$ longitudine incommensurabilis [prop. XIII]. itaque utrumque $\Delta\Theta$, EK medium est [prop. XX]. et quoniam AH, $H\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt, AH et $H\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt; uerum AH, AZ et ΔH, EH longitudine commensurabiles sunt. quare AZ, EH longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. est autem $AZ : EH = AI : EK$ [VI, 1]. ergo AI, EK incommensurabilia sunt [prop. XI].

construatur igitur quadratum $\Lambda M = AI$, et auferatur spatio ZK aequale $N\Xi$ in eodem angulo positum, quo ΛM. itaque ΛM, $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et figura describatur [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam est $AZ \times ZH = EH^2$, erit $AZ : EH = EH : ZH$ [VI, 17]. est autem $AZ : EH = AI : EK$ [VI, 1], et $EH : ZH = EK : ZK$ [id.]. quare etiam $AI : EK = EK : ZK$. itaque EK medium est proportionale inter AI, ZK. uerum etiam MN medium est proportionale inter quadrata ΛM, $N\Xi$ [prop. LIII lemma]. et $AI = \Lambda M$,

---

m. 1 P. 8. Post μέν ras. 1 litt. V. AZ μήκει V. ἔστιν V. 9. μήκει] om. V. ἄρα] supra scr. m. 1 F. 10. ΛZ] supra scr. Δ b. EH] in ras. V. 11. τό] (pr.) τὸ ἀπὸ τῆς F. τό] τήν b. EK] $E\Lambda$ supra scr. K b. ἀσύμμετρον — 12. EK] om. P. 11. ἐστὶ τό] m. 2 F. 13. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. τετραγώνων P, sed corr. 15. ὄν] supra scr. m. 1 F. τῷ] τό F. 17. ὑπό] ἀπό b. 22. καὶ ὡς — 23. τὸ ZK] mg. m. 2 B. 23. τὸ ZK] ZK PB.

ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ, τὸ δὲ ΕΚ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΔΚ ἴσον τοῖς ΛΜ, ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ ΑΙ, ΖΚ καί ἐστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· μέση ἄρα ἑκατέρα τῶν ΛΟ, ΟΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΜΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε καὶ ἡ ΛΟ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Λέγω δή, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΕΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ· ὥστε αἱ ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ἡ ΛΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

1. *τό*] corr. ex *τῷ* m. rec. P. *τῷ*] corr. ex *τό* m. rec. P. 2. *ΛΞ*] *ΑΞ* F. *τό*] corr. ex *τῷ* m. rec. P. *ἐστί*] P, om. BFVb. *τῷ*] corr. ex *τό* m. rec. P. Post *ΔΘ* in b adp. :∼, deinde spatium 1 lin. uacat. 3. *ΝΞ*] mut. in *ΝΖ* m. rec. B. 4. *ἴσον*] (prius) m. 2 FV. 5. *ΛΝ*] *ΛΜ* P; *ΑΝ* F, corr. m. 2. 6. *ΛΝ*] *Λ* eras. V. 7. *μέση* BFVb. *ἔστιν* P. 11. *σύμμετρον*] (prius) *σύμμετρος* F. 12. *τῆς*] corr. ex *τῶν* F. Post *ΛΟ* add. *ΟΝ* B et supra m. 1 P. *τῆς*] corr. ex

$ZK = N\Xi$. itaque etiam $EK = MN$. uerum $MN = \Delta\Xi$ [I, 43], $EK = \Delta\Theta$. quare etiam $\Delta K = \Upsilon\Phi X + N\Xi$. est autem etiam

$$AK = \Delta M + N\Xi.$$

itaque reliquum $AB = \Sigma T = \Delta N^2$. ergo ΔN quadrata spatio AB aequalis est.

dico, ΔN mediae apotomen esse secundam. nam quoniam demonstrauimus, AI, ZK media esse, et $AI = \Delta O^2$, $ZK = ON^2$, etiam utrumque ΔO^2, ON^2 medium est. quare utraque ΔO, ON media est. et quoniam AI, ZK commensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI], etiam ΔO^2, ON^2 commensurabilia sunt. rursus quoniam demonstrauimus, AI et EK incommensurabilia esse, etiam ΔM et MN, hoc est ΔO^2 et $\Delta O \times ON$, incommensurabilia sunt. quare etiam ΔO, ON longitudine incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. ergo ΔO, ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles. iam dico, easdem spatium medium comprehendere. nam quoniam demonstrauimus, EK medium esse, et $EK = \Delta O \times ON$, etiam $\Delta O \times ON$ medium est. quare ΔO, ON mediae sunt potentia tantum commensurabiles medium comprehendentes. itaque ΔN mediae apotome est secunda [prop. LXXV]. et spatio AB aequalis est quadrata.

Ergo recta spatio AB aequalis quadrata mediae apotome est secunda; quod erat demonstrandum.

τῶν F. 14. *ἐστίν* P. MN] NM P. 15. *τῷ*] corr. ex *τό* m. 1 F. 16. *εἰσίν* P. 18. *περιέχουσαι* V. 19. *γάρ*] om. Fb, m. 2 B. 20. *μέσον* — 21. ON (prius)] mg. V. 22. *σύμετροι* P. AN b. *μέση* BFVb. 23. *ἐστιν* P. χωρίον] om. Theon (BFVb). 24. *μέση* BFVb. 25. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb.

ϙδ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Χωρίον γὰρ τὸ *ΑΒ* περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς *ΑΓ* καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς *ΑΔ*· λέγω, ὅτι ἡ τὸ *ΑΒ* χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ τῇ *ΑΔ* προσαρμόζουσα ἡ *ΔΗ*· αἱ ἄρα *ΑΗ*, *ΗΔ* ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ *ΑΗ* σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ *ΑΓ* μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ *ΑΗ* τῆς προσαρμοζούσης τῆς *ΔΗ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ *ΑΗ* τῆς *ΗΔ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς *ΔΗ* ἴσον παρὰ τὴν *ΑΗ* παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ *ΔΗ* δίχα κατὰ τὸ *Ε*, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΕΗ* ἴσον παρὰ τὴν *ΑΗ* παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΖ*, *ΖΗ*· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ *ΑΖ* τῇ *ΖΗ*. ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν *Ε*, *Ζ*, *Η* παράλληλοι ταῖς *ΑΓ*, *ΒΔ* αἱ *ΕΘ*, *ΖΙ*, *ΗΚ*. ἐπεὶ οὖν ῥητή ἐστιν ἡ *ΑΗ* καὶ σύμμετρος τῇ *ΑΓ* μήκει, ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ *ΑΚ*. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *ΔΗ* τῇ *ΑΓ* μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΔΚ*. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ *ΑΖ* τῇ *ΖΗ* μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ *ΑΙ* τῷ *ΖΚ*.

---

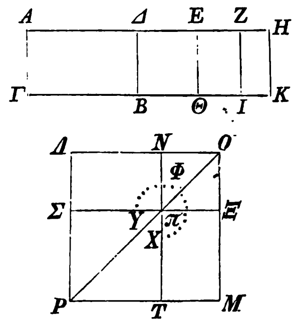
2. *τετάρτης ἀποτομῆς* V. 4. *ἐστί* BV, comp. Fb. 5. *ῥητῆς τῆς*] corr. ex *τῆς* m. 2 F, *ῥητῆς* V. 6. *ΑΔ*] *ΑΒΔ* b, *Δ* in ras. m. 1 B. *ἡ*] supra scr. P. 7. *ΑΒ*] om. Bb, m. 2 V. 8. *ΑΔ*] mut. in *ΑΒ* m. 2 F, *ΑΒ* b. 11. *ΔΗ*] *ΗΔ* V. 12. *δυναμένη* P. συμμέτρου B, corr. m. 2. 15. *ἴσον*] *μέσον φ*. 16. ἀσύμμετρον P, σύμμετρα b. διελεῖ μήκει V.

XCIV.

Si spatium recta rationali et apotome quarta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata minor est.

Spatium enim AB rationali $A\Gamma$ et apotome quarta $A\Delta$ comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam minorem esse.

sit enim ΔH rectae $A\Delta$ congruens. itaque AH, $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et AH rationali propositae $A\Gamma$ longitudine commensurabilis est, tota autem AH quadrata congruentem ΔH excedit quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis [deff. tert. 4]. iam quoniam AH^2 excedit $H\Delta^2$ quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis, si $\frac{1}{4}\Delta H^2$ aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, in partes incommensurabiles eam diuidet [prop. XVIII]. ΔH igitur in E in duas partes aequales secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur spatium figura quadrata deficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ, ZH incommensurabiles sunt. iam per E, Z, H rectis $A\Gamma$, $B\Delta$ parallelae ducantur $E\Theta$, ZI, HK. quoniam igitur AH rationalis est et rectae $A\Gamma$ longitudine commensurabilis, AK rationale est. rursus



17. EH] E e corr. V. 19. ἐστίν PV. 20. μήκει] om. V. ZH] HZ F. δι^α P. E, Z] Z, E PFb, in ras. m. 2 B. 21. $B\Delta$] eras. V, ΓB b. 23. ὅλον] supra scr. m. 1 b. 22. ἐστίν P. 26. ἀσύμμετρον] ἀ- del. F. ἄρα ἐστί F.

συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν ΛΟΜ τὸ ΝΞ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετραγώνοις, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἐστίν, καί ἐστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον

---

2. Post ΖΚ ras. 1 litt. F. 3. τῶν] om. BFV. ΛΟΝ φ et, supra scr. Μ, b. τό] e corr. m. rec. b. 4. ἐστι] εἰσι P. 5. ἡ] m. rec. P. 7. ΑΖ] ΑΗ, supra scr. Ζ, b. τήν] om. P. 8. ΑΖ] Ζ in ras. F. 9. οὕτως] οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως b.

quoniam ΔH, $A\Gamma$ longitudine incommensurabiles sunt, et utraque rationalis est, ΔK medium est [prop. XXI]. rursus quoniam AZ, ZH longitudine incommensurabiles sunt, AI et ZK incommensurabilia sunt [VI, 1; prop. XI]. iam construatur quadratum $\Lambda M = AI$, et spatio ZK aequale auferatur $N\Xi$ in eodem angulo positum ΛOM. itaque quadrata ΛM, $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [cfr. uol. I p. 137 not.]. iam quoniam $AZ \times ZH = EH^2$, erit $AZ : EH = EH : ZH$ [VI, 17]. est autem $AZ : EH = AI : EK$, $EH : ZH = EK : ZK$ [VI, 1]. quare EK medium est proportionale inter AI, ZK. uerum etiam MN medium est proportionale inter quadrata ΛM, $N\Xi$ [prop. LIII lemma], et $AI = \Lambda M$, $ZK = N\Xi$. quare etiam $EK = MN$. uerum $\Delta\Theta = EK$, $\Lambda\Xi = MN$ [I, 43]. itaque $\Delta K = \Upsilon\Phi X + N\Xi$. iam quoniam est $AK = \Lambda M + N\Xi$, quorum $\Delta K = \Upsilon\Phi X + N\Xi$, erit $AB = \Sigma T = \Lambda N^2$. ergo ΛN quadrata spatio AB aequalis est.

dico, ΛN irrationalem esse minorem, quae uocatur. nam quoniam AK rationale est, et $AK = \Lambda O^2 + ON^2$, $\Lambda O^2 + ON^2$ rationale est. rursus quoniam ΔK medium est, et $\Delta K = 2\,\Lambda O \times ON$, $2\,\Lambda O \times ON$ medium est.

ἐστί] om. V. AI] supra scr. Γ b. EH] E e corr. F, ras. 2 litt. V. 10. ἐστί] om. V. 11. ἔστιν P. 12. τετραγώνων] om. V. 13. AI] $A\Gamma$ P. $N\Xi$] N in ras. V. 14. ἴσον ἐστί] ἐστιν ἴσον F, ἴσον V. τῷ] (alt.) τό corr. in τόν (?) V. 15. ἐστί] om. V. τό] τῷ V. $\Theta\Delta$ B. τῷ] corr. ex τό m. 1 V, τό P. ἐστί] om. V. τό] τῷ P. 20. τετραγώνῳ] om. V. 22. ΛH F. ἀνάλογος Fb. 24. τῶν] τοῦ P. 25. ON τετραγώνων V. ἐστι BVb, comp. F. 26. ἐστίν] comp. F, ἐστί PBVb. τὸ ΔK] om. V. τῷ] e corr. V.

ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΛΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ τετραγώνῳ. αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἡ ΛΝ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϞΕ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετρα-

---

1. *ἐστί* BVb, comp. F: 2. *σύμμετρον* B, corr. m. 2. *ἄρα ἐστί* V. *τετράγωνον*] om. V. 3. *ἀσύμμετροί εἰσι δυνάμει* V, deinde del. m. 2: *διὰ τὸ δεύτερον θεώρημα τοῦ βιβλίου.* 6. *ΛΗ* F. *ἀνάλογος* P, sed corr. 7. *ΑΒ*] *Β* corr. ex *Γ* m. 2 F. 8. *ἐστί* B. 9. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. BFVb. 12. *ἡ*] (alt.) om. FVb, m. 2 B. 13. *ἐστι* BV, comp. Fb. 16. *ἡ*] om. FVb, m. 2 B. 20. *ΗΔ*] in ras. m. 1 b, *ΔΗ* P. *μήκει*] om. V. 21. *ΑΓ μήκει* V. 22. *συμμέτρου* B, corr. m. 2.

et quoniam demonstrauimus, ΔI et ZK incommensurabilia esse, etiam ΔO^2, ON^2 incommensurabilia sunt. itaque ΔO, ON potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum rationalem, duplum autem rectangulum medium. quare ΔN irrationalis est minor, quae uocatur [prop. LXXVI]. et $\Delta N^2 = AB$.

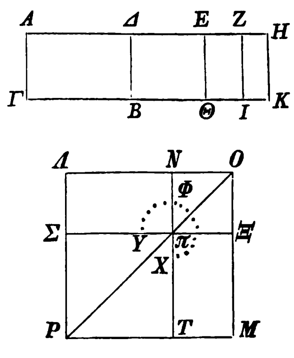
Ergo recta spatio AB aequalis quadrata minor est; quod erat demonstrandum.

XCV.

Si spatium recta rationali et apotome quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta est cum rationali totum medium efficiens.

Spatium enim AB recta rationali $A\Gamma$ et apotome quinta $A\Delta$ comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam rectam esse cum rationali totum medium efficientem.

nam ΔH rectae $A\Delta$ congruens sit. itaque AH, $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles,



et congruens $H\Delta$ rationali propositae $A\Gamma$ longitudine commensurabilis est, tota autem AH quadrata excedit congruentem ΔH quadrato rectae sibi incommensurabilis [deff. tert. 5]. itaque si $\frac{1}{4}\Delta H^2$ aequale rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes incommensurabiles eam diuidet [prop. XVIII]. ΔH igitur in puncto E in duas partes aequales

γώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΓΑ μήκει, καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ ΔΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ

---

1. Post διελεῖ del. μήκει V. 3. ΑΗ] Η e corr. m. 1 V. 4. τό] corr. ex τῷ P. 5. τῇ] supra scr. m. 1 b. Post μήκει add. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η τῇ ΑΓ (Α b) παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ b, mg. FV. 6. ΓΑ] in ras. V, ΑΓ P. 8. Ante σύμμετρος ras. 1 litt. V. ἄρα ἐστί V b, m. 2 F. 9. ἑστάτω b, ἔστω V. 10. τετράγωνον] supra scr. F. τὸ ΝΞ]

secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae $\varDelta H$ adplicetur spatium figura quadrata deficiens et sit $\varDelta Z \times ZH$. itaque $\varDelta Z$, ZH longitudine incommensurabiles sunt. et quoniam $\varDelta H$, $\Gamma\varDelta$ longitudine incommensurabiles, et utraque rationalis est, $\varDelta K$ medium est [prop. XXI]. rursus quoniam $\varDelta H$ rationalis est et rectae $\varDelta\Gamma$ longitudine commensurabilis, $\varDelta K$ rationale est [prop. XIX]. construatur igitur quadratum $\varLambda M = \varDelta I$, et spatio ZK aequale auferatur quadratum $N\Xi$ in eodem angulo $\varLambda OM$ positum. itaque quadrata $\varLambda M$, $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [uol. I p. 137 not.]. eodem igitur modo demonstrabimus, esse $\varLambda N^2 = \varDelta B$.

dico, $\varLambda N$ rectam esse cum rationali totum medium efficientem. quoniam enim demonstrauimus, $\varDelta K$ medium esse, et $\varDelta K = \varLambda O^2 + ON^2$, $\varLambda O^2 + ON^2$ medium est. rursus quoniam $\varDelta K$ rationale est, et

$$\varDelta K = 2\,\varLambda O \times ON,$$

hoc et ipsum rationale est. et quoniam $\varDelta I$, ZK incommensurabilia sunt, etiam $\varLambda O^2$, ON^2 incommensurabilia sunt. quare $\varLambda O$, ON potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, duplum autem rectangulum rationale. itaque reliqua

---

om. Theon (BFVb). 11. ὑπὸ τῶν BFb. $\varLambda OM$ τὸ $N\Xi$ ($M\Xi$ φ) Theon (BFVb). 12. ἐστι] εἰσι in ras. m. 2 V. τά] in ras. m. 2 V. $\varLambda M$] $\varLambda$ in ras. m. 2 V. 18. συγκείμενον] om. V. 19. ἐστί BV, comp. Fb. 21. αὐτό] τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν $\varLambda O$, ON Theon (BFVb). ἐστι PBV, comp. Fb. 22. $\varDelta I$] mut. in $\varDelta E$ m. 2 F, $\varDelta E$ b. 23. ON] (prius) e corr. V. 25. ἡ] om. B. 26. καλουμένη] κα- supra scr. m. 1 b. ἡ μετά b.

ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ τὸ ΑΒ ἄρα χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϚϚʹ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε [σημεῖον], καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει

---

3. *ἄρα τὸ ΑΒ* V. *ἄρα*] om. PB, m. 2 F. *χωρίον ἄρα* B. 4. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. BFVb. 6. *ὑπ'* P. 8. *ἐστι* BV, comp. Fb. 9. *ΑΒ*] *ΑΒΓ* P. 10. *ἕκτης τῆς*] corr. ex *ἕκτης* m. rec. P. 11. *ἡ*] om. BFVb. 14. *καὶ οὐδετέρα*] in ras. F. 15. *αὐτῶν*] *τῶν ΑΗ, ΗΔ* BVb, e corr. F. 16. *τῆς*] (alt.) *τῆι* F. 17. *συμμέτρου* P. *ἑαυτοῦ* F. 18. *ἐπεί* — 19. *μήκει*] mg. m. 2 B. 19. ἑαυτῆς B, *ἑαυτοῦ* F. *τοῦ*] *τῷ* b. 20. *ΑΗ*] *ΔΗ* B. παραβάλωμεν B, παρα-

ΔN irrationalis est cum rationali totum medium efficiens, quae uocatur [prop. LXXVII]. et $\Delta N^2 = AB$.

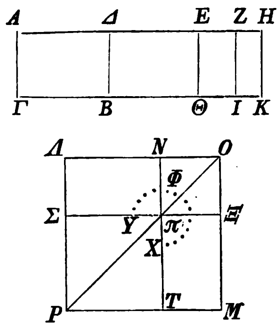
Ergo recta spatio AB aequalis quadrata recta cum rationali totum medium efficiens est; quod erat demonstrandum.

XCVI.

Si spatium recta rationali et sexta apotome comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens.

Spatium enim AB rationali $A\Gamma$ et sexta apotome $A\Delta$ comprehendatur. dico, rectam spatio AB aequalem quadratam rectam esse cum medio totum medium efficientem.

nam ΔH rectae $A\Delta$ congruens sit. itaque AH, $H\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles,



et neutra earum rationali propositae $A\Gamma$ longitudine commensurabilis est, tota autem AH congruentem ΔH quadrata excedit quadrato rectae sibi longitudine incommensurabilis [deff. tert. 6]. iam quoniam AH^2 excedit $H\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis longitudine, si $\frac{1}{4}\Delta H^2$ aequale rectae AH adplicatur spatium figura quadrata deficiens, in partes incommensurabiles eam diuidet [prop. XVIII]. ΔH igitur in puncto E in duas partes aequales secetur, et quadrato EH^2 aequale rectae AH adplicetur

βαλλόμενον F, παραβάλλωμεν Vb. 22. σημεῖον] om. P. τῷ] τό F. 23. ἴσον] om. V. ἴσον ἐλλεῖπον V.

τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΑΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔΚ καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΚ τῷ ΔΚ, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ

---

1. ἀσύμμετρον P, corr. m. 1. 2. ΖΗ] ΗΖ F. 3. ΑΙ] ἀπὸ ΑΙ F. 4. ἐστίν P. ΑΙ] corr. ex ΑΓ m. rec. P. 5. ΑΚ] corr. ex ΔΚ m. rec. P. 6. πάλιν — 7. ΔΚ] om. P. 10. ΚΔ] ΔΚ V. 11. ΚΔ] corr. ex ΔΚ V. 12. ἀφῃρήσθω

spatium figura quadrata dêficiens, et sit $AZ \times ZH$. itaque AZ, ZH longitudine incommensurabiles sunt. est autem $AZ : ZH = AI : ZK$ [VI, 1]. itaque AI, ZK incommensurabilia sunt [prop. XI]. et quoniam AH, $A\Gamma$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles, AK medium est [prop. XXI]. rursus quoniam $A\Gamma$, ΔH rationales sunt et longitudine incommensurabiles, etiam ΔK medium est [id.]. quoniam igitur AH, $H\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt, AH et $H\Delta$ longitudine incommensurabiles sunt. est autem $AH : H\Delta = AK : K\Delta$ [VI, 1]. itaque AK, $K\Delta$ incommensurabilia sunt [prop. XI]. construatur igitur quadratum $\Lambda M = AI$, et spatio ZK aequale auferatur $N\Xi$ in eodem angulo positum. itaque quadrata ΛM, $N\Xi$ circum eandem diametrum posita sunt [VI, 26]. sit OP eorum diametrus, et describatur figura [uol. I p. 137 not.]. eodem igitur modo, quo supra, demonstrabimus, esse $\Lambda N^2 = AB$.

dico, ΛN rectam esse cum medio totum medium efficientem. nam quoniam demonstrauimus, AK medium esse, et $AK = \Lambda O^2 + ON^2$, $\Lambda O^2 + ON^2$ medium est. rursus quoniam demonstrauimus ΔK medium esse, et $\Delta K = 2\,\Lambda O \times ON$, etiam $2\,\Lambda O \times ON$ medium est. et quoniam demonstrauimus, AK et ΔK incommensurabilia esse, etiam $\Lambda O^2 + ON^2$ et $2\,\Lambda O \times ON$ incommensurabilia sunt. et quoniam AI, ZK incom-

τὸ $N\Xi$ V. 13. περί — γωνίαν] om. Fb, mg. m. 2 B. αὐτήν] (prius) αὐτὴν τὴν ὑπὸ ΛOM V. τὸ $N\Xi$] om. V. 14. ἐστι] εἰσι V. τετράγωνα] om. V. 16. δύναται — 18. ΛN] mg. m. 2 V. 18. ἡ] (alt.) om. P. 20. ἴσον] m. 2 F. 22. ἐστί PBVb, comp. F. 24. ἐστί PBV, comp. Fb. 26. ἄρα] om. BFVb.

ΛΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον ἔτι τε τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν. ἡ ἄρα ΛΝ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϙζ΄.

Το ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ. ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ

2. *ΟΝ*] (prius) *ΝΟ* P. 3. τε] μέν BFVb. συγκείμενον] m. 2 V. 4. καί] ins. m. 1 V. ἔτι] ε- in ras. V. 6. *ΛΝ*] *corr. ex ΑΝ* B. 7. ποιοῦσαι φ. 8. χωρίον] *ΑΒ* BFb, *ΑΒ* χωρίον V. 9. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] :∼ P. 11. ἀπό] om. b.

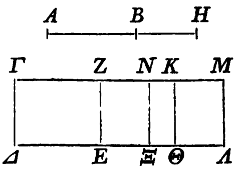
mensurabilia sunt, etiam ΛO^2, ON^2 incommensurabilia sunt. itaque ΛO, ON potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et duplum rectangulum medium et praeterea quadrata et duplum rectangulum incommensurabilia. itaque ΛN irrationalis est cum medio totum medium efficiens, quae uocatur [prop. LXXVIII]. et $\Lambda N^2 = AB$.

Ergo recta spatio illo aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

XCVII.

Quadratum apotomes rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen primam.

Sit AB apotome, $\Gamma\Delta$ autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ. dico, ΓZ primam esse apotomen.



nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH, HB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII]. et rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = BH^2$. itaque totum $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$. quorum $\Gamma E = AB^2$. itaque reliquum $Z\Lambda = 2\, AH \times HB$ [II, 7]. iam ZM in puncto N in duas partes aequales secetur, et per N rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur $N\Xi$. itaque $Z\Xi = \Lambda N = AH \times HB$. et quoniam $AH^2 + HB^2$

12. ποεῖ P, corr. m. 1. 17. AB] B in ras. V. BH] HB e corr. V. 19. AH] corr. ex $A\Delta$ m. 1 F. 22. $Z\Lambda$] ΛZ P. 23. τῶν] om. P. 25. $Z\Xi$] ΞZ F. ΛN] corr. ex $N\Lambda$ 26. τῷ ἅπαξ ὑπό V.

τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* ῥητά ἐστιν, καί ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* ἴσον τὸ *ΔΜ*, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ *ΔΜ*. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν *ΓΔ* παραβέβληται πλάτος ποιοῦν την *ΓΜ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΜ* καὶ σύμμετρος τῇ *ΓΔ* μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ*, καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* ἴσον τὸ *ΖΛ*, μέσον ἄρα τὸ *ΖΛ*. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν *ΓΔ* παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν *ΖΜ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΜ* καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΓΔ* μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* ῥητά ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ*. καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* ἴσον ἐστὶ τὸ *ΓΛ*, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* τὸ *ΖΛ*· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΔΜ* τῷ *ΖΛ*. ὡς δὲ τὸ *ΔΜ* πρὸς τὸ *ΖΛ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΓΜ* πρὸς τὴν *ΖΜ*. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΜ* τῇ *ΖΜ* μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα *ΓΜ*, *ΜΖ* ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ *ΓΖ* ἄρα ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ*, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *ΑΗ* ἴσον τὸ *ΓΘ*, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *ΒΗ* ἴσον τὸ *ΚΛ*, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* τὸ *ΝΛ*, καὶ τῶν *ΓΘ*, *ΚΛ* ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ *ΝΛ*· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ *ΓΘ* πρὸς τὸ *ΝΛ*, οὕτως τὸ *ΝΛ* πρὸς τὸ *ΚΛ*. ἀλλʼ ὡς μὲν τὸ *ΓΘ* πρὸς τὸ *ΝΛ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΓΚ* πρὸς

1. ῥητά — 2. *ΗΒ*] mg. m. 2 B. 1. ἐστιν] ἐστι PBVb, comp. F. καί ἐστι τοῖς] τοῖς δέ V. 3. παράκειται Theon (BFVb); παραβέβληται supra add. m. 2 B. 6. τῷ] corr. ex τό FV. 8. ἐστίν] ἐστὶ καί F. καὶ ἀσύμμετρος] bis b. 10. ἐστι BV, comp. b, εἰσι F? μέσα P, et F, corr. m. 1. 11. *ἄρα*] om. B. ἐστίν P. 12. καί] καί ἐστι BFVb. ἐστί]

rationale est, et $\Delta M = AH^2 + HB^2$, ΔM rationale est. et rectae rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ΓM. itaque ΓM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. rursus quoniam medium est $2\,AH \times HB$, et $Z\Lambda = 2\,AH \times HB$, $Z\Lambda$ medium est. et rectae rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ZM. itaque ZM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AH^2 + HB^2$ rationale est, $2\,AH \times HB$ autem medium, $AH^2 + HB^2$ et $2\,AH \times HB$ incommensurabilia sunt. et

$$\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2,\ Z\Lambda = 2\,AH \times HB.$$

itaque ΔM, $Z\Lambda$ incommensurabilia sunt. est autem $\Delta M : Z\Lambda = \Gamma M : ZM$ [VI, 1]. itaque ΓM, ZM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM, MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

iam dico, eandem primam esse. quoniam enim $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = BH^2$, $N\Lambda = AH \times HB$, erit etiam $N\Lambda$ medium proportionale inter $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. quare $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. est autem $\Gamma\Theta : N\Lambda = \Gamma K : NM$ et $N\Lambda : K\Lambda = NM : KM$ [VI, 1]. itaque $\Gamma K \times KM = MN^2$ [VI, 17] $= \frac{1}{4} ZM^2$.

om. BFVb. 13. *HB*] corr. ex *AB* m. 1 b, *HB* ἴσον V. 15. τήν] om. B. 18. ἐστι BVb, comp. F. 21. ἐστι] (alt.) ἐστιν P. τῷ] corr. ex τό m. 1 F. 22. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν *AH*, *HB* ἴσον τὸ *NΛ*, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *BH* ἴσον τὸ *KΛ*· καί κτλ. Theon (BFVb). 24. *NΛ*] e corr. V. ἔστιν — 25. πρὸς τὸ *NΛ*] mg. m. 1 P. 25. *NΛ*] corr. ex *ΛN* V. οὕτως — 26. *NΛ*] mg. m. 2 B. 26. *NΛ*] corr. ex *ΛN* V. ἐστίν] m. 2 F. ἡ] ras. 1 litt. *b*.

τὴν *ΝΜ*· ὡς δὲ τὸ *ΝΛ* πρὸς τὸ *ΚΛ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΝΜ* πρὸς τὴν *ΚΜ*· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν *ΓΚ*, *ΚΜ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΝΜ*, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς *ΖΜ*. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΗ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΗΒ*, σύμμετρόν [ἐστι] καὶ τὸ *ΓΘ* τῷ *ΚΛ*. ὡς δὲ τὸ *ΓΘ* πρὸς τὸ *ΚΛ*, οὕτως ἡ *ΓΚ* πρὸς τὴν *ΚΜ*· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΚ* τῇ *ΚΜ*. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ *ΓΜ*, *ΜΖ*, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς *ΖΜ* ἴσον παρὰ τὴν *ΓΜ* παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν *ΓΚ*, *ΚΜ*, καί ἐστι σύμμετρος ἡ *ΓΚ* τῇ *ΚΜ*, ἡ ἄρα *ΓΜ* τῆς *ΜΖ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ *ΓΜ* σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ *ΓΔ* μήκει· ἡ ἄρα *ΓΖ* ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϙη΄.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ *ΑΒ*, ῥητὴ δὲ ἡ *ΓΔ*, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΒ* ἴσον παρὰ τὴν *ΓΔ* παραβεβλήσθω τὸ *ΓΕ* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΓΖ*· λέγω, ὅτι ἡ *ΓΖ* ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἔστω γὰρ τῇ *ΑΒ* προσαρμόζουσα ἡ *ΒΗ*· αἱ ἄρα *ΑΗ*, *ΗΒ* μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *ΑΗ* ἴσον παρὰ τὴν

1. *ὡς δέ* — 2. *ΚΜ*] om. F, uidetur fuisse in mg. 2. Post prius *ΚΜ* add. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ (ΜΝ F), οὕτως ἡ

et quoniam AH^2, HB^2 commensurabilia sunt, etiam $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$ commensurabilia sunt. est autem

$$\Gamma\Theta : K\Lambda = \Gamma K : KM$$

[VI, 1]. itaque ΓK, KM commensurabiles sunt [prop. XI]. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM, MZ, et $\frac{1}{4} ZM^2$ aequale spatium rectae ΓM adplicatum est $\Gamma K \times KM$ figura quadrata deficiens, et ΓK, KM commensurabiles sunt, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine [prop. XVII]. et ΓM rationali propositae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis est. itaque ΓZ apotome est prima [deff. tert. 1].

Ergo quadratum apotomes rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen primam; quod erat demonstrandum.

XCVIII.

Quadratum mediae apotomes primae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam.

Sit AB mediae apotome prima, $\Gamma\Delta$ autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ. dico, ΓZ apotomen esse secundam.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH, HB mediae sunt potentia tantum commensurabiles

---

NM πρὸς τὴν *KM* FVb. 3. τουτέστιν P. 4. σύμμετρος P, corr. m. rec. ἔστιν P. 5. ἐστι] om. P. 11. ἔστιν P. ἀσύμμετρος F. 12. *ΓM*] *MΓ* e corr. V; *KM* supra scr. *Γ* b. *MZ*] ZM F. ἀσυμμέτρου b, ἀ- add. m. 2 F. 15. παρὰ ῥητήν] om. V. 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 21. μέση BFVb. 22. Post παρά del. ῥη m. 1 P. *ΓΔ*] *ΓM* F. 23. *ΓE*] corr. ex ΓΘ m. rec. P. 25. BH] corr. ex *ZH* m. 2 V. αἱ ἄρα] ἄρα ἡ F. 26. εἰσίν B.

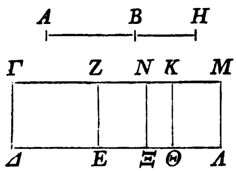
ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον το ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕ, λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΛ. ῥητὸν δέ [ἐστι] τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· ῥητὸν ἄρα τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΓΛ, μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τουτέστι τὸ ΖΛ, ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ δευτέρα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνά-

---

1. τὸ ἄρα βεβλήσθω φ. τὸ ΓΘ] om. V, supra est ras. ΓΚ] ΓΚ τὸ ΓΘ V. 3. ΓΛ] ΓΔ b. 4. Post ΗΒ add. καί ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσα καὶ ἴσα τῷ ΓΛ V. 5. ῥητή] -τή in ras. P. 6. ἡ ΓΜ καί] m. 2 F. 8. ἐστὶ τῷ ΓΕ] τῷ ΓΕ ὧν φ. 9. ἐστι] om. P. 10. ἄρα] ἐστι καί V, supra add. ἄρα m. 2; ἄρα καί F? (καί φ). 12. ἐστίν B. 14. ἐστί PBFV, comp. b. ΗΒ ῥητόν V. ΖΛ] ΓΛ, supra scr. Z, b. 15. ῥητόν] om. V. ἄρα] m. 2 F. 16. πρὸς τό] τῷ B, corr. m. 2. ἐστίν] om. V. 17. ἀσύμμετρος — ΖΜ]



spatium rationale comprehendentes [prop. LXXIV]. et quadrato AH^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur $\Gamma\Theta$ latitudinem efficiens ΓK, quadrato autem HB^2 aequale $K\Lambda$ latitudinem efficiens KM. quare totum $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$. quare etiam $\Gamma\Lambda$ medium est. et rectae rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ΓM. itaque ΓM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam est

$$\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2,$$

quorum $AB^2 = \Gamma E$, erit reliquum $2\,AH \times HB = Z\Lambda$ [II, 7]. uerum $2\,AH \times HB$ rationale est. itaque $Z\Lambda$ rationale est. et rectae rationali ZE adplicatum est latitudinem efficiens ZM. itaque etiam ZM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. quoniam igitur $AH^2 + HB^2$, hoc est $\Gamma\Lambda$, medium est, et $2\,AH \times HB$, hoc est $Z\Lambda$, rationale, $\Gamma\Lambda$ et $Z\Lambda$ incommensurabilia sunt. est autem

$$\Gamma\Lambda : Z\Lambda = \Gamma M : ZM$$

[VI, 1]. itaque ΓM, ZM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM, MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

iam dico, eandem secundam esse. ZM enim in N in duas partes aequales secetur, et per N rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur $N\Xi$. itaque $Z\Xi = N\Lambda = AH \times HB$.

---

mg. m. 2 B. 18. ἄρα] φ, post *MZ* hab. F. 19. ἐστι BVb, comp. F. 20. ὅτι ἐστί Vb. δευτέρα ἐστίν B. 23. ΖΞ] *Z in ras. B.* 24. ἐπεί] ἔτι B (supra est ras.).

λογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ*, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς *ΑΗ* τῷ *ΓΘ*, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* τῷ *ΝΛ*, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς *ΒΗ* τῷ *ΚΛ*, καὶ τῶν *ΓΘ*, *ΚΛ* ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ *ΝΛ*· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ *ΓΘ* πρὸς τὸ *ΝΛ*, οὕτως τὸ *ΝΛ* πρὸς τὸ *ΚΛ*. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ *ΓΘ* πρὸς τὸ *ΝΛ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΓΚ* πρὸς τὴν *ΝΜ*, ὡς δὲ τὸ *ΝΛ* πρὸς τὸ *ΚΛ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΝΜ* πρὸς τὴν *ΜΚ*· ὡς ἄρα ἡ *ΓΚ* πρὸς τὴν *ΝΜ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΝΜ* πρὸς τὴν *ΚΜ*· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν *ΓΚ*, *ΚΜ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΝΜ*, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς *ΖΜ* [καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΗ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΒΗ*, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ *ΓΘ* τῷ *ΚΛ*, τουτέστιν ἡ *ΓΚ* τῇ *ΚΜ*]. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ *ΓΜ*, *ΜΖ*, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς *ΜΖ* ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν *ΓΜ* παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν *ΓΚ*, *ΚΜ* καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα *ΓΜ* τῆς *ΜΖ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ *ΖΜ* σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ *ΓΔ*· ἡ ἄρα *ΓΖ* ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϘΘ΄.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

---

1. ἐστιν] ἐστι V. ἴσον] supra scr. m. 1 V. 2. τῷ] in ras. V. 3. τῷ] τῶν mut. in τό m. 1 V. τό] τῷ P. τῷ] *τό PV.* τῶν] τῷ b. 5. τὸ *ΝΛ*] (alt.) mg. m. 2 F. πρὸς *τὸ ΚΛ*] τὸ *ΝΛ* φ. Deinde del. m. 1: ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς

et quoniam $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $AH^2 = \Gamma\Theta$, $AH \times HB = N\Lambda$, $BH^2 = K\Lambda$, etiam $N\Lambda$ medium est proportionale inter $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. itaque erit $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. uerum $\Gamma\Theta : N\Lambda = \Gamma K : NM$, $N\Lambda : K\Lambda = NM : MK$ [VI, 1]. quare $\Gamma K : NM = NM : KM$. itaque $\Gamma K \times KM = NM^2$ [VI, 17], hoc est $= \frac{1}{4} ZM^2$. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM, MZ, et $\frac{1}{4} MZ^2$ aequale maiori ΓM adplicatum est spatium $\Gamma K \times KM$ figura quadrata deficiens et eam in partes commensurabiles[1]) diuidit, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis longitudine [prop. XVII]. et congruens ZM rationali propositae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis est. itaque ΓZ apotome est secunda [deff. tert. 2].

Ergo quadratum mediae apotomes primae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam; quod erat demonstrandum.

IC.

Quadratum mediae apotomes secundae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen tertiam.

1) Nam AH^2 et BH^2 commensurabilia sunt, et
$$AH^2 : BH^2 = \Gamma\Theta : K\Lambda = \Gamma K : KM$$
[VI, 1]; tum u. prop. XI.

τὸ $N\Lambda$, οὕτως τὸ $N\Lambda$ πρὸς τὸ $K\Lambda$ V. 8. NM] N in ras. V. 9. ἐστίν] om. V. 11. τοῦ] τῷ F. καὶ ἐπεί — 13. KM] om. P. 12. ἐστι] om. Fb. Post BH del. οὕτως m. 1 V. 13. ἐστι] supra scr. m. 1 FV. 14. δύο εὐθεῖαι] supra scr. m. 1 F. καὶ τῷ] τῷ δέ BFVb. 15. τῆς] e corr. V. MZ] corr. ex ZM V. 17. τό] mut. in τῷ m. 2 P. 18. τῆς] corr. ex τῇ m. rec. V. 20. Mg. γρ. ἀσύμμετρος m. 1 P. $\Gamma\Delta$] $\Gamma\Delta$ μήκει φ. 22. πρώτης] om. P. 24. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] :⟩— P, om. BFVb.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ AB, ῥητὴ δὲ ἡ $Γ Δ$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $Γ Δ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΓE$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓZ$· λέγω, ὅτι ἡ $ΓZ$ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

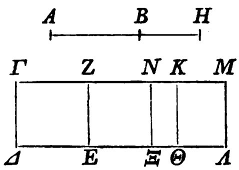
Ἔστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ BH· αἱ ἄρα AH, HB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν $Γ Δ$ παραβεβλήσθω τὸ $ΓΘ$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓK$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH ἴσον παρὰ τὴν $KΘ$ παραβεβλήσθω τὸ $KΛ$ πλάτος ποιοῦν τὴν KM· ὅλον ἄρα τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB [καί ἐστι μέσα τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB]· μέσον ἄρα καὶ τὸ $ΓΛ$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $Γ Δ$ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΓM$· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $ΓM$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ $Γ Δ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ $ΓΛ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB, ὧν τὸ $ΓE$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB, λοιπὸν ἄρα τὸ $ΛZ$ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB. τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N σημεῖον, καὶ τῇ $Γ Δ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $NΞ$· ἑκάτερον ἄρα τῶν $ZΞ$, $NΛ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AH, HB· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ZΛ$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZM καὶ ἀσύμμετρος τῇ $Γ Δ$ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ AH, HB δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] μήκει ἡ AH τῇ HB· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν

---

1. μέση BV. δευτέρα] in ras. V. 4. τρίτη ἐστίν BFVb. 9. $KΘ$] corr. ex $ΓΘ$ V. 10. KM] corr. ex $KΛ$ m. 1 F. $ΓΛ$] corr. ex $KΛ$ V. 11. καί — 12. HB] om. FVb, m. 2 B. 13. ῥητόν P. 17. $ΛZ$] corr. ex $ZΛ$ V. 21.

Sit AB mediae apotome secunda, $\Gamma\Delta$ autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ. dico, ΓZ apotomen tertiam esse.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH, HB mediae sunt potentia tantum commensurabiles spatium medium comprehendentes [prop. LXXV]. et quadrato AH^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur $\Gamma\Theta$ latitudinem efficiens ΓK, quadrato autem BH^2 aequale rectae $K\Theta$ adplicetur $K\Lambda$ latitudinem efficiens KM. itaque totum $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$. et $AH^2 + HB^2$ medium est. itaque etiam $\Gamma\Lambda$ medium est. et rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ΓM. quare ΓM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam est $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$, quorum $\Gamma E = AB^2$, erit reliquum $\Lambda Z = 2\,AH \times HB$ [II, 7]. iam ZM in puncto N in duas partes aequales secetur, et rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur $N\Xi$. itaque $Z\Xi = N\Lambda = AH \times HB$. uerum $AH \times HB$ medium est. itaque etiam $Z\Lambda$ medium est. et rectae rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ZM. quare ZM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam AH, HB potentia tantum commensurabiles sunt, AH et HB longitudine incommensurabiles sunt. quare etiam AH^2 et $AH \times HB$ incommensurabilia sunt [prop. XXI lemma, prop. XI].



$Z\Lambda$] corr. ex $Z\Delta$ m. rec. P, mut. in ΛZ V. 23. καί] (primum) ἔστιν V. 25. ἐστί] om. P. AH] H in ras. V. τῇ] om. b.

ΑΗ, ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν *ΑΗ, ΗΒ* τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΗ, ΗΒ*· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΗ, ΗΒ* τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΗ, ΗΒ*. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν *ΑΗ, ΗΒ* ἴσον ἐστὶ τὸ *ΓΛ*, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΗ, ΗΒ* ἴσον ἐστὶ τὸ *ΖΛ*· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΓΛ* τῷ *ΖΛ*. ὡς δὲ τὸ *ΓΛ* πρὸς τὸ *ΖΛ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΓΜ* πρὸς τὴν *ΖΜ*· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΜ* τῇ *ΖΜ* μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα *ΓΜ, ΜΖ* ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΖ*.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΗ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΗΒ*, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ *ΓΘ* τῷ *ΚΛ*· ὥστε καὶ ἡ *ΓΚ* τῇ *ΚΜ*. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΗ, ΗΒ* μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΗ, ΗΒ*, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *ΑΗ* ἴσον τὸ *ΓΘ*, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *ΗΒ* ἴσον τὸ *ΚΛ*, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν *ΑΗ, ΗΒ* ἴσον τὸ *ΝΛ*, καὶ τῶν *ΓΘ, ΚΛ* ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ *ΝΛ*· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ *ΓΘ* πρὸς τὸ *ΝΛ*, οὕτως τὸ *ΝΛ* πρὸς τὸ *ΚΛ*. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ *ΓΘ* πρὸς τὸ *ΝΛ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΓΚ* πρὸς τὴν *ΝΜ*, ὡς δὲ τὸ *ΝΛ* πρὸς τὸ *ΚΛ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΝΜ* πρὸς τὴν *ΚΜ*· ὡς ἄρα ἡ *ΓΚ* προς τὴν *ΜΝ*, οὕτως ἐστὶν ἡ *ΜΝ* πρὸς τὴν *ΚΜ*· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν *ΓΚ, ΚΜ* ἴσον ἐστὶ τῷ [ἀπὸ τῆς *ΜΝ*, τουτέστι τῷ] τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς *ΖΜ*. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ *ΓΜ, ΜΖ*, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς *ΖΜ* ἴσον παρὰ τὴν *ΓΜ* παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς

1. τό] *σύμμετρόν ἐστι τό* Theon (BFVb). 2. Post *HB* del. *τὸ ΖΛ* V. *ἀσύμμετρα* — 3. HB] om. P. 2. *ἀσύμμετρα* — *5. ΖΛ*] mg. m. 1 V. 2. ἄρα] om. b. ἐστιν ἄρα V. ἀπὸ]

uerum AH^2 et $AH^2 + HB^2$, $AH \times HB$ et $2\,AH \times HB$ commensurabilia sunt. itaque $AH^2 + HB^2$ et $2\,AH \times HB$ incommensurabilia sunt [prop. XIII]. est autem

$$\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2,\ Z\Lambda = 2\,AH \times HB.$$

quare $\Gamma\Lambda$, $Z\Lambda$ incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Lambda : Z\Lambda = \Gamma M : ZM$ [VI, 1]. quare ΓM, ZM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM, MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem tertiam esse. nam quoniam AH^2, HB^2 commensurabilia sunt, etiam $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$ commensurabilia sunt. quare etiam ΓK, KM commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. et quoniam $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = HB^2$, $N\Lambda = AH \times HB$, etiam $N\Lambda$ medium est proportionale inter $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. itaque $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. est autem

$$\Gamma\Theta : N\Lambda = \Gamma K : NM,\ N\Lambda : K\Lambda = NM : KM$$

[VI, 1]. quare $\Gamma K : MN = MN : KM$. itaque [VI, 17] $\Gamma K \times KM = MN^2 = \frac{1}{4} ZM^2$. quoniam igitur duae rectae inaequales sunt ΓM, MZ, et $\frac{1}{4} ZM^2$ aequale rectae ΓM spatium adplicatum est figura quadrata deficiens et eam in partes commensurabiles diuidit,

---

ὑπό B. 4. $\Gamma\Lambda$] corr. ex $\Gamma\Delta$ m. rec. P. τῷ] τό V. 5. τό] (prius) mut. in τῷ V. 7. ΓM] $H\Gamma$ b. ZM] MZ P, ΓM b. 8. Post ZM eras. μή V. 9. MZ] ZM F. 12. σύμμετρος P, corr. m. rec. 13. ἄρα ἐστί V. $K\Lambda$] $\Gamma\Lambda$ P. 14. KM σύμμετρός ἐστι V. τῶν] (alt.) om. b. 15. ἐστι] (prius) ἐστιν P. 17. ὑπό] ἀπό F. 20. τὸν $K\Lambda$ P. 21. NM] MN bφ. 22. $K\Lambda$] NK? P. MN F. ὡς — 23. τὴν KM] punctis del. V. 23. MN] NM V. ἐστίν] om. V. MN \ NM V. 24. ἀπό — 25. τῷ] mg. m. 1 P.

σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπο συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρ'.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομην τετάρτην.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον το ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καί ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπο τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ

1. σύμμετρον P. ΜΖ] ΖΜ P. 3. μήκει] om. b. 4. ἐστιν P. 5. τό] corr. ex τῷ m. 2 F. ἀπό] m. 2 F. παρὰ ῥητήν] mg. m. 2 V. 6. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb, comp. P.

ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi commensurabilis. et neutra rectarum ΓM, MZ rationali propositae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis est. itaque ΓZ apotome est tertia [deff. tert. 3].

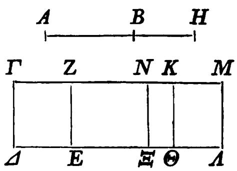
Ergo quadratum mediae apotomes secundae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam; quod erat demonstrandum.

C.

Quadratum minoris rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quartam.

Sit AB minor, $\Gamma\Delta$ autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rationali $\Gamma\Delta$ adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ. dico, ΓZ apotomen quartam esse.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH, HB potentia incommensurabiles sunt efficientes $AH^2 + HB^2$ rationale, $2 AH \times HB$ autem medium [prop. LXXVI]. et quadrato AH^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur $\Gamma\Theta$ latitudinem efficiens ΓK, et $K\Lambda = BH^2$ latitudinem efficiens KM. itaque totum $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$. et $AH^2 + HB^2$ rationale est. quare etiam $\Gamma\Lambda$ rationale est. et rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ΓM. itaque ΓM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. et quoniam totum $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$,



11. ἐλάσσων] ἐ- in ras. m. 1 P. 14. ἐστιν P. τετάρτη ἐστίν V. 15. γάρ] m. 2 F. 16. HB] supra scr. m. 1 P. 19. μέν] om. V. 21. KM] ΓK b. 25. καί] om. Fb. ἐστιν V.

τῷ ἀπὸ τῆς AB, λοιπὸν ἄρα τὸ $Z\varDelta$ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB. τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N ὁποτέρᾳ τῶν $\Gamma\varDelta$, $M\varDelta$ παράλληλος ἡ $N\Xi$· ἑκάτερον ἄρα τῶν $Z\Xi$, $N\varDelta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH, HB. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB μέσον ἐστὶ καί ἐστιν ἴσον τῷ $Z\varDelta$, καὶ τὸ $Z\varDelta$ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZM καὶ ἀσύμμετρος τῇ $\Gamma\varDelta$ μήκει. καὶ ἐπεὶ το μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB ῥητόν ἐστιν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB μέσον, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH, HB τῷ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB. ἴσον δέ [ἐστι] τὸ $\Gamma\varDelta$ τοῖς ἀπὸ τῶν AH, HB, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν AH, HB ἴσον τὸ $Z\varDelta$· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ $\Gamma\varDelta$ τῷ $Z\varDelta$. ὡς δὲ τὸ $\Gamma\varDelta$ πρὸς τὸ $Z\varDelta$, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓM πρὸς τὴν MZ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM τῇ MZ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓM, MZ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ.

Λέγω [δή], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ AH, HB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB. καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον τὸ $\Gamma\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ $K\varLambda$· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Gamma\Theta$ τῷ $K\varLambda$. ὡς δὲ τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ $K\varLambda$, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK πρὸς τὴν KM· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓK τῇ KM μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH, HB μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν AH, HB, καί ἐστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς AH τῷ $\Gamma\Theta$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς HB τῷ $K\varLambda$,

1. τῷ] (alt.) τῶν P. 2. οὖν] οὖν καί P. 3. τοῦ N σημείου V. 5. τῶν] om. P. 6. τῷ] corr. ex τό m. 1 B.

quorum $\Gamma E = AB^2$, erit reliquum $Z\Lambda = 2AH \times HB$ [II, 7]. iam ZM in puncto N in duas partes aequales secetur, et per N utrique $\Gamma\Delta$, $M\Lambda$ parallela ducatur $N\Xi$. itaque $Z\Xi = N\Lambda = AH \times HB$. et quoniam $2AH \times HB$ medium est et $2AH \times HB = Z\Lambda$, etiam $Z\Lambda$ medium est. et rectae rationali ZE adplicatum est latitudinem efficiens ZM. itaque ZM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AH^2 + HB^2$ rationale est, $2AH \times HB$ autem medium, $AH^2 + HB^2$ et $2AH \times HB$ incommensurabilia sunt. uerum $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$ et $Z\Lambda = 2AH \times HB$. quare $\Gamma\Lambda$, $Z\Lambda$ incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Lambda : Z\Lambda = \Gamma M : MZ$ [VI, 1]. quare ΓM, MZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM, MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem quartam esse. nam quoniam AH, HB potentia incommensurabiles sunt, etiam AH^2 et HB^2 incommensurabilia sunt. et $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = HB^2$. quare $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$ incommensurabilia sunt. uerum $\Gamma\Theta : K\Lambda = \Gamma K : KM$ [VI, 1]. itaque ΓK, KM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et

---

7. ἐστί PBV, comp. Fb. 10. ἐστι PBV, comp. Fb. 11. ἄρα] om. P. 13. δ' b. ἐστι] om. P. 14. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. 15. ἐστί] om. P. τό] in ras. m. 1 P. Supra $\Gamma\Lambda$ τῷ ras. est in V. $\Gamma\Lambda$] $Z\Lambda$ P. $Z\Lambda$] $\Gamma\Lambda$ P. 16. πρὸς τήν] τῇ P. ZM F. ἀσύμμετρος — 17. MZ] om. P. 20. δή] om. FVb, m. 2 B. 22. ἄρα] ἐστι V. HB] corr. ex BH m. 2 V. 23. τό] corr. ex τῷ m. 1 F. 26. ΓK] $K\Gamma$ P. 27. μήκει] mg. m. 2 V. 28. τό] (alt.) τῷ PV. 29. μέν] om. V. τῷ] τό P et V, corr. m. 1. τό] τῷ P. τῷ] τό P. Supra $K\Lambda$ add. N m. 1 b.

τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ ΝΛ, τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστίν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἑξῆς.

ρα´.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα

---

1. ὑπό] corr. ex ἀπό V. τῶν] (alt.) τῷ b. 3. ΝΛ] ΛΝ F. οὕτως — 4. ΝΛ] mg. m. 2 B. 3. ΚΛ] ΚΛ' F. 4. μέν] om. V. ἐστίν] m. 2 F. 6. ὡς] καὶ ὡς b, mg. V. ἄρα — 7. τὴν ΚΜ] mg. V. 6. τήν] (alt.) τό φ. 8. ΝΜΡ.

quoniam $AH \times HB$ inter AH^2, HB^2 medium est proportionale [prop. XXI lemma], et $AH^2 = \Gamma\Theta$, $HB^2 = K\Lambda$, $AH \times HB = N\Lambda$, inter $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$ medium proportionale est $N\Lambda$. itaque $\Gamma\Theta : N\Lambda = N\Lambda : K\Lambda$. uerum $\Gamma\Theta : N\Lambda = \Gamma K : NM$, $N\Lambda : K\Lambda = NM : KM$ [VI, 1]. itaque $\Gamma K : MN = MN : KM$. quare $\Gamma K \times KM = MN^2$ [VI, 17] $= \frac{1}{4} ZM^2$. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM, MZ, et $\frac{1}{4} MZ^2$ aequale rectae ΓM adplicatum est $\Gamma K \times KM$ figura quadrata deficiens et eam in partes incommensurabiles diuidit, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. et tota ΓM rationali propositae $\Gamma\Delta$ commensurabilis est longitudine. itaque ΓZ apotome est quarta [deff. tert. 4].

Ergo quadratum minoris, et quae sequuntur.

CI.

Quadratum rectae cum rationali totum medium efficientis rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quintam.

Sit AB recta cum rationali totum medium efficiens, $\Gamma\Delta$ autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ. dico, ΓZ apotomen quintam esse.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque rectae

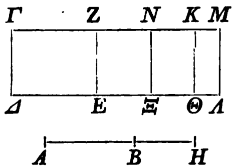
10. *καὶ τῷ*] *τῷ δέ* FV. *τοῦ*] m. 2 F. 12. *τό*] *τῷ* b. 14. *συμμέτρου* Pb et V, sed corr. *ἐστιν*] om. V φ. 15. *μήκει*] *ἐστι* V. 17. *καὶ τὰ ἑξῆς*] *παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην* Theon (BFVb). 22. *ἡ*] (prius) om. V. 23. *ῥητή* — AB] mg. m. 1 P. *τῷ*] e corr. P. 24. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma$ F. ΓZ] corr. ex $\Gamma\Delta$ P. 25. ΓZ] $Z\Gamma$ e corr. V, $\Delta\Gamma$ φ. 26. *γάρ*] m. 2 F.

ΑΗ, *ΗΒ* εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *ΑΗ* ἴσον παρὰ τὴν *ΓΔ* παραβεβλήσθω τὸ *ΓΘ*, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *ΗΒ* ἴσον τὸ *ΚΛ*· ὅλον ἄρα τὸ *ΓΛ* ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ*. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* ἅμα μέσον ἐστίν· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΓΛ*. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν *ΓΔ* παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν *ΓΜ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΜ* καὶ ἀσύμμετρος τῇ *ΓΔ*. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ *ΓΛ* ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ*, ὧν τὸ *ΓΕ* ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΑΒ*, λοιπὸν ἄρα τὸ *ΖΛ* ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ*. τετμήσθω οὖν ἡ *ΖΜ* δίχα κατὰ τὸ *Ν*, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ *Ν* ὁποτέρᾳ τῶν *ΓΔ*, *ΜΛ* παράλληλος ἡ *ΝΞ*· ἑκάτερον ἄρα τῶν *ΖΞ*, *ΝΛ* ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ*. καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΗ*, *ΗΒ* ῥητόν ἐστι καί [ἐστιν] ἴσον τῷ *ΖΛ*, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ *ΖΛ*. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν *ΕΖ* παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν *ΖΜ*· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΖΜ* καὶ σύμμετρος τῇ *ΓΔ* μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν *ΓΛ* μέσον ἐστίν, τὸ δὲ *ΖΛ* ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΓΛ* τῷ *ΖΛ*. ὡς δὲ τὸ *ΓΛ* πρὸς τὸ *ΖΛ*, οὕτως ἡ *ΓΜ* πρὸς τὴν *ΜΖ*· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΜ* τῇ *ΜΖ* μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα *ΓΜ*, *ΜΖ* ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *ΓΖ*.

---

3. *μέν*] om. V. 5. Post *δέ* ras. 2 litt. V. *ΗΒ*] mut. in *ΑΒ* m. 2 F, in ras. V. *ΓΛ*] *Λ* in ras. m. 1 P, corr. ex *Α* B. 6. *τὸ δέ* — 7. *ἀπὸ τῶν*] *τὰ δὲ ἀπὸ τῆς* V. 7. *ἐστίν*] *ἐστί* PB, comp. FV; *εἶναι* V, supra scr. *ἐστι* m. 1. 8. *ΓΛ*] mut. in *ΛΓ* m. 1 F. 9. ΓΜ] ΓΗ φ. ῥητή] ῥη- om. φ. 11. *ΓΕ*] *ΒΑ* B. 13. οὖν] om. Vφ. 14. καί — Ν] supra

AH, HB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam, duplum autem rectangulum rationale [prop. LXXVII].



et rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = HB^2$. itaque totum

$$\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2.$$

uerum $AH^2 + HB^2$ medium est; itaque etiam $\Gamma\Lambda$ medium est. et rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ΓM. itaque ΓM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$, quorum $\Gamma E = AB^2$, erit reliquum $Z\Lambda = 2\,AH \times HB$ [II, 7]. iam ZM in N in duas partes aequales secetur, et per N utrique $\Gamma\Delta$, $M\Lambda$ parallela ducatur $N\Xi$. quare $Z\Xi = N\Lambda = AH \times HB$. et quoniam $2\,AH \times HB$ rationale est, et $2\,AH \times HB = Z\Lambda$, $Z\Lambda$ rationale est. et rationali EZ adplicatum est latitudinem efficiens ZM. itaque ZM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. et quoniam $\Gamma\Lambda$ medium est, $Z\Lambda$ autem rationale, $\Gamma\Lambda$ et $Z\Lambda$ incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Lambda : Z\Lambda = \Gamma M : MZ$ [VI, 1]. quare ΓM, MZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM, MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

---

scr. m. 1 P. 17. *ἐστιν*] om. P. $Z\Lambda$] Z (uel Ξ) corr. ex N V, item lin. 18. 18. EZ] e corr. m. 1 V. 19. ZM] (alt.) ZH b. 20. *ἀσύμμετρος* B, supra σ ras. est in V. $\Gamma\Lambda$] corr. ex ΓZ b; ΓZ V, Z eras. 21. *ἐστίν*] *ἐστί* PBFV, comp. b. 23. *τήν*] *τό* V. *ἐστίν*] *ἐστὶ καί* Vφ. 24. ΓM, MZ *ἄρα* V.

Λέγω δή, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ, ἀσύμμετρον ἄρα το ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ

---

1. δή] m. 2 F. 2. ΓΚ, ΚΜ FV. 4. ἐστι] om. Vφ. 5. ΑΗ] (alt.) Α e corr. F. 6. ΓΘ] Θ in ras. m. 1 P. 8. τήν] om. P. ΚΜ] ΓΜ P et B in ras. ἄρα ἐστίν Vφ. ΚΜ] ΓΜ P et in ras. B. 9. εἰσι P, corr. m. 1. 10. ΖΜ] ΜΖ

Iam dico, eandem quintam esse. nam similiter demonstrabimus, esse $\Gamma K \times KM = NM^2 = \frac{1}{4} ZM^2$. et quoniam AH^2, HB^2 incommensurabilia sunt, et $AH^2 = \Gamma\Theta$, $HB^2 = K\Lambda$, $\Gamma\Theta$ et $K\Lambda$ incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Theta : K\Lambda = \Gamma K : KM$ [VI, 1]. quare ΓK, KM longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. iam quoniam sunt duae rectae inaequales ΓM, MZ, et $\frac{1}{4} ZM^2$ aequale rectae ΓM adplicatum est spatium figura quadrata deficiens et eam in partes incommensurabiles diuidit, ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. et congruens ZM rationali propositae $\Gamma\Delta$ commensurabilis est.

Ergo ΓZ apotome est quinta [deff. tert. 5]; quod erat demonstrandum.

CII.

Quadratum rectae cum medio totum medium efficientis rectae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen sextam.

Sit AB recta cum medio totum medium efficiens, $\Gamma\Delta$ autem rationalis, et quadrato AB^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ. dico, ΓZ apotomen sextam esse.

nam BH rectae AB congruens sit. itaque AH, HB potentia incommensurabiles sunt efficientes sum-

---

P, et V (?), sed corr. m. 1. 13. ἑαυτῇ μήκει V. 14. ZM] MZ P. 15. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFVb. In hac pag. et sequenti multi loci euan. in F. 21. παρά] παρὰ ῥητήν Vφ. τήν] supra scr. m. 1 V. 22. τήν] τη b. 24. ἁρμόζουσα, supra scr. προσ m. 1, F. HB P. 25. Post HB ras. 5 litt. V. Supra τε scr. μέν m. 1 b.

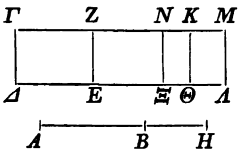
τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον καὶ ἀσύμμετρον τα ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΓΔ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὶ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ· μέσον ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καί ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρα ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν την ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί. αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν

---

1. μέσον] ῥητόν F. καί] καὶ ἔτι V, ἔτι δέ BFb. ἀσύμμετρα BFVb. τά] τό P. 5. Post ΚΛ add. πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ mg. m. 2 V. 6. ἐστί] om. P. 8. ἐστίν] ἐστὶ καί V. 10. ἴσον ἐστί Vφ. τῷ] τό φ. 11. ἐστι] γίνεται V. δίς] corr. ex δί m. 2 P. 12. ἐστί PBV, comp. Fb. 16. τοῖς]



mam quadratorum mediam et $2 AH \times HB$ medium et $AH^2 + HB^2$, $2 AH \times HB$ incommensurabilia [prop. LXXVIII]. iam rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur $\Gamma\Theta = AH^2$ latitudinem efficiens ΓK et $K\Lambda = BH^2$. itaque totum $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$. quare etiam $\Gamma\Lambda$ medium est. et rationali $\Gamma\Delta$ adplicatum est latitudinem efficiens ΓM. itaque ΓM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. iam quoniam $\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2$, quorum $\Gamma E = AB^2$, erit reliquum $Z\Lambda = 2 AH \times HB$ [II, 7]. et $2 AH \times HB$ medium est. quare etiam $Z\Lambda$ medium est. et rationali ZE adplicatum est latitudinem efficiens ZM. quare ZM rationalis est et rectae $\Gamma\Delta$ longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. et quoniam $AH^2 + HB^2$, $2 AH \times HB$ incommensurabilia sunt, et

$$\Gamma\Lambda = AH^2 + HB^2, \; Z\Lambda = 2 AH \times HB,$$

$\Gamma\Lambda$ et $Z\Lambda$ incommensurabilia sunt. est autem [VI, 1] $\Gamma\Lambda : Z\Lambda = \Gamma M : MZ$. quare ΓM, MZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XI]. et utraque rationalis est. itaque ΓM, MZ rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo ΓZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam dico, eandem sextam esse. nam quoniam est $Z\Lambda = 2 AH \times HB$, recta ZM in N in duas partes aequales secetur, et per N rectae $\Gamma\Delta$ parallela du-

τῷ V. ἀπὸ τῶν] om. P. 17. $\Gamma\Lambda$ — 18. ἴσον τό] om. b. 18. ἐστί] om. P. 19. τό] (alt.) om. P. ZΛ] corr. ex $Z\Delta$? F. 20. τήν] om. P. MZ] in ras. V. MZ] corr. ex ZM V. 21. ἄρα] om. V. 22. εἰσιν P. ἔστιν ἄρα B.

ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καί ἐστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ργ'.

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσ-

---

2. εἰσὶ σύμμετροι b. 4. τὸ ἀπὸ τῆς ΓΘ P. 5. ἐστί] om. V. 6. τῷ] corr. ex τό m. 2 P. 8. ἀπὸ τῶν] om. P; ὑπὸ τῶν supra scr. α m. 1 b; ὑπὸ τῶν ins. m. 2 F. 11. τῷ δὲ ὑπό — ΝΛ] mg. m. 2 V. τῷ] τό V. ΑΗ] Η e corr. V. ἴσον ἐστί P. 12. ΝΛ] Ν b. 13. ΝΛ] (prius) Λ, supra add. Ν m. 2, F. 14. τὰ αὐτά] corr. ex ταῦτα V. ΜΖ] corr. ex ΖΜ V. 15. ἀσυμμέτρου] corr. ex συμμέτρου m. 2 B.

catur $N\Xi$. itaque $Z\Xi = N\Delta = AH \times HB$. et quoniam AH, HB potentia incommensurabiles sunt, AH^2 et HB^2 incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = HB^2$. quare $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$ incommensurabilia sunt. est autem $\Gamma\Theta : K\Lambda = \Gamma K : KM$ [VI, 1]. itaque ΓK, KM incommensurabiles sunt [prop. XI]. et quoniam $AH \times HB$ medium est proportionale inter AH^2 et HB^2 [prop. XXI lemma], et $\Gamma\Theta = AH^2$, $K\Lambda = HB^2$, $N\Delta = AH \times HB$, etiąm $N\Delta$ medium est proportionale inter $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$. itaque $\Gamma\Theta : N\Delta = N\Delta : K\Lambda$. et eadem de causa [cfr. p. 326, 9 sq.] ΓM^2 excedit MZ^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XVIII]. et neutra earum rationali propositae $\Gamma\Delta$ commensurabilis est.

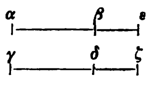
Ergo ΓZ apotome est sexta [deff. tert. 6]; quod erat demonstrandum.[1])

CIII.

Recta apotomae longitudine commensurabilis apotome est et ordine eadem.

Sit AB apotome, et rectae AB longitudine commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ quoque apotomen esse et ordine eandem ac AB.

nam quoniam AB apotome est, BE ei congruens

1) In B figura haec est 

. deinde in mg. adiicitur uera addito ἐν ἄλλῳ.

16. $\Gamma\Delta$] Δ in ras. m. 1 F. 17. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 21. σύμμετρος ἔστω μήκει BFb. 23. ἡ] m. 2 P. 24. προσαρμόζουσα ἔστω αὐτῇ V. αὐτῇ ἡ Fb.

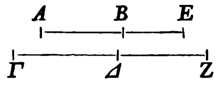
ἁρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἓν ἄρα προς ἕν, πάντα [ἐστὶ] πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΕ μὲν τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. καὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι [ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ].

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. ἤτοι δὴ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπο συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ, εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΔΖ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἰ δὲ ἡ ΑΕ [τῆς ΕΒ] μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ, εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ

1. ἡ ΒΕ] αὐτῇ ἡ ΕΒ φ. ΑΕ] om. φ, Α B. 3. ὁ] (prius) om. φ. ΔΖ] ΖΔ B. 4. ἐστί] om. P. ἔστιν ἄρα] om. Vφ. 5. ὅλη ἄρα V. 7. ἄρα] ἄρα ἐστί Vφ (del. V). καί] om. φ. μὲν ΑΕ Vφ (post ΑΕ hab. μέν F). ΒΕ δέ BFb. τῇ] supra scr. V m. 1. 8. ΔΖ] ΖΔ BF. καὶ αἱ] καί εἰσιν αἱ V, αἱ δέ B. εἰσι] om. V. 10. ἀποτομή — 11. ΑΒ] om. P. 12. οὖν] γάρ Theon (BFVb). ΑΕ] corr. ex ΕΑ V. 13. τήν] om. B, m. 2 F. ΖΔ F. ἄρα] om. V.

sit. itaque AE, EB rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII]. fiat $BE : \Delta Z = AB : \Gamma\Delta$ [VI, 12]. quare etiam ut unum ad unum, ita omnia ad omnia [V, 12]. itaque $AE : \Gamma Z = AB : \Gamma\Delta$. uerum AB, $\Gamma\Delta$ longitudine commensurabiles sunt. itaque etiam AE, ΓZ et BE, ΔZ commensurabiles sunt [prop. XI]. uerum AE, EB rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque etiam ΓZ, $Z\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XIII].



Iam quoniam est $AE : \Gamma Z = BE : \Delta Z$, permutando [V, 16] est $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$. AE^2 igitur EB^2 excedit quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis. iam si AE^2 excedit EB^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam ΓZ^2 excedet $Z\Delta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. et siue AE rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam ΓZ ei commensurabilis est [prop. XII], siue BE, etiam ΔZ [id.], siue neutra rectarum AE, EB, etiam neutra rectarum ΓZ, $Z\Delta$ [prop. XIII]. sin AE^2 excedit quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam ΓZ^2 excedet $Z\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XIV]. et siue AE rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam ΓZ

14. δή] om. P, δέ BV. 15. τῷ] corr. ex τοῦ m. 2 P. 16. Ante εἰ ins. καί (?) m. 2 F. εἰ] e corr. V. 17. ἀσυμμέτρου B, corr. m. 2; ἀ- supra add. m. 2 F. τῆς] τῆι F. 18. ἀσυμμέτρου B, et F, sed corr. 19. AE] $A\Theta$ e corr. F. 20. ΓZ] $Z\Gamma$ F. 21. οὐδετέρα] οὐθετέρα P. 22. τῆς EB] mg. m. 1 P. δύναται] supra add. ησε m. 2 F, δυνήσεται b. συμμέτρου P, corr. m. 1. 23. τῆς] corr. ex τῇ V.

ἡ ΔΖ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρδ'.

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΒ. αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ.

Λέγω δή, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ [γάρ] ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ [ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ,

---

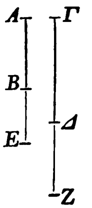
1. οὐδετέρα] (alt.) οὐδὲ οὐδετέρα BVb; οὐδέ m. 2 add. F, sed euan. 3. τῇ ΑΒ] om. F. 4. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. Pb, om. BV. 6. μέσῃ BFVb. μέση BV, et F, corr. m. 2. ἀποτομῆς b (σ supra add. F m. 2). 7. ἐστιν P. 8. μέση BFb, et V (σ fuit add. m. 2, sed eras.). μήκει] m. 2 B, om. FVb. 9. λέγω δή V. μέση B, et F supra add. σ m. 2; in V add. σ *m. 2, sed eras.* 10. ἐστι̅ P. 11. μέση B. αὐτῇ] ἡ V, *αὐτῇ ἡ Fb.* 12. ἡ] αὐτῇ ἡ V. ΑΕ] ΕΑ BFb. εἰσίν B.

ei commensurabilis est, siue *BE*, etiam *ΔZ* [prop. XII], siue neutra rectarum *AE*, *EB*, neutra rectarum *ΓZ*, *ZΔ* [prop. XIII].

Ergo *ΓΔ* apotome est [prop. LXXIII] et ordine eadem ac *AB* [deff. tert. 1—6]; quod erat demonstrandum.

CIV.

Recta mediae apotomae commensurabilis mediae apotome est et ordine eadem.



Sit *AB* mediae apotome, et rectae *AB* longitudine commensurabilis sit *ΓΔ*. dico, etiam *ΓΔ* mediae apotomen esse et ordine eandem ac *AB*.

nam quoniam *AB* mediae apotome est, sit *EB* ei congruens. itaque *AE*, *EB* mediae sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIV—LXXV]. et fiat [VI, 12] *AB*:*ΓΔ* = *BE*:*ΔZ*. itaque etiam *AE*, *ΓZ* et *BE*, *ΔZ* commensurabiles sunt [V, 12; prop. XI]. uerum *AE*, *EB* mediae sunt potentia tantum commensurabiles. itaque etiam *ΓZ* *ZΔ* mediae sunt [prop. XXIII] potentia tantum commensurabiles [prop. XIII]. ergo *ΓΔ* mediae est apotome [prop. LXXIV—LXXV].

Iam dico, eam ordine quoque eandem esse ac *AB*.

---

14. οὕτως — ΔZ] mg. m. 1 P. ἡ] corr. ex ὁ m. 2 V. 15. ἐστί] om. P, ἐστίν B. *AE*] *AE* μέν BFb. 16. καί — 17. σύμμετροι] mg. m. 2 B. 17. *ΓZ*] Z e corr. V. 18. μέση B. ἀποτομῆς V. 19. λέγω] δεικτέον Theon (BFVb). δή] corr. ex δὲ ὅτι m. 1 F; δέ V. ἐστίν] om. Theon (BFVb). 20. γάρ] om. P. οὕτως ἐστίν F. 21. τήν] om. BFb. ἀλλ' — p. 336, 2. *ZΔ*] om. P.

ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ], ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπο τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ [καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ]. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, εἴτε μέσον [ἐστὶ] τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, μέσον [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ.

Μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρε'.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω γὰρ ἐλάσσων ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστίν.

Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτά· καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ ουν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ. συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ [καὶ ἐναλλάξ]·

1. ΓΖ] (alt.) ΖΓ F. 2. ὡς] om. φ. 4. καί — 6. ΖΔ] om. P. 6. τῶν] (alt.) om. b. 9. ΕΒ] Β in ras. m. 1 P. ἔσται] ἐστι Theon (BFVb). 10. ἐστί] om. P 11. ἐστί] om. P. 12. μέση BVb. 13. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFVb. 15. τῇ] corr. in τῆς m. 2 F, τῆς b. ἐλάσσονι] ἔλασσον F m. 1, ἐλάσσονος b, F m. 2. Deinde del. μήκει F. 16. γάρ]

quoniam est $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$ [V, 12; V, 16], erit etiam [prop. XXI lemma]

$$AE^2 : AE \times EB = \Gamma Z^2 : \Gamma Z \times Z\Delta.$$

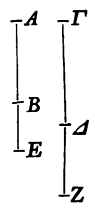
uerum AE^2, ΓZ^2 commensurabilia sunt. itaque etiam $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt [V, 16; prop. XI]. siue igitur $AE \times EB$ rationale est, etiam $\Gamma Z \times Z\Delta$ rationale est [def. 4], siue $AE \times EB$ medium est, etiam $\Gamma Z \times Z\Delta$ medium est [prop. XXIII coroll.].

Ergo $\Gamma\Delta$ apotome est et ordine eadem ac AB [prop. LXXIV—LXXV]; quod erat demonstrandum.

CV.

Recta minori commensurabilis minor est.

Sit enim AB minor et rectae AB commensurabilis $\Gamma\Delta$. dico, etiam $\Gamma\Delta$ minorem esse.



nam fiant eadem. et quoniam AE, EB potentia sunt incommensurabiles [prop. LXXVI], etiam ΓZ, $Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt [prop. XIII]. iam quoniam est $AE : EB = \Gamma Z : Z\Delta$ [V, 12; V, 16], erit etiam $AE^2 : EB^2 = \Gamma Z^2 : Z\Delta^2$ [VI, 20 coroll.]. itaque etiam componendo [V, 18] est

$$AE^2 + EB^2 : EB^2 = \Gamma Z^2 + Z\Delta^2 : Z\Delta^2.$$

---

om. Theon (BFVb). 17. $\Gamma\Delta$] (prius) Γ e corr. m. 1 F. ἐστί PBV, comp. Fb. 18. αὐτὰ τοῖς πρότερον V. 19. ΓZ] Z e corr. m. 1 b. 20. τήν] om. Bb. 21. τήν] m. 2 F. 23. $Z\Delta$] ΔZ B. ἐστίν] supra scr. m. 1 V. τά] corr. ex τό m. 1 V. 24. τῶν] τῆς P. οὕτω Bb. 25. $Z\Delta$] (prius) supra scr. m. 2 F (Z incertum est). καὶ ἐναλλάξ] om. P. Dein del. ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZΔ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓZ, ZΔ V.

σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπο τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπο τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρς'.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων

---

1. ἐστιν P. τό] corr. ex τῷ m. 1 F, ex τά (?) V. ΔΖ] ΖΔ P. 3. τετράγωνον Pb et comp. ins. m. 1 V. 4. ΓΔ, ΔΖ b. 5. ῥηταί F, sed corr. 6. ἐστί] εἰσί F. 7. τό]

uerum BE^2, ΔZ^2 commensurabilia sunt. itaque etiam $AE^2 + EB^2$ et $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ commensurabilia sunt [V, 16; prop. XI]. uerum $AE^2 + EB^2$ rationale est [prop. LXXVI]. itaque etiam $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ rationale est [def. 4]. rursus quoniam est

$$AE^2 : AE \times EB = \Gamma Z^2 : \Gamma Z \times Z\Delta$$

[prop. XXI lemma], et AE^2, ΓZ^2 commensurabilia sunt, etiam $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia sunt. $AE \times EB$ autem medium est [prop. LXXVI]. quare etiam $\Gamma Z \times Z\Delta$ medium est [prop. XXIII coroll.]. itaque ΓZ, $Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum rationalem, rectangulum autem medium.

Ergo $\Gamma\Delta$ minor est [prop. LXXVI]; quod erat demonstrandum.

CVI.

Recta rectae cum rationali totum medium efficienti commensurabilis recta est cum rationali totum medium efficiens.

Sit AB recta cum rationali totum medium efficiens et rectae AB commensurabilis $\Gamma\Delta$. dico, etiam $\Gamma\Delta$ rectam esse cum rationali totum medium efficientem.

nam BE rectae AB congruens sit. itaque AE, EB potentia incommensurabiles sunt efficientes $AE^2 + EB^2$

om. V. 9. Post $Z\Delta$ add. καὶ ἐναλλάξ BFb. 13. ἄρα ἐστὶ καί BFb. $Z\Delta$] (alt.) Z in ras. m. 1 B. 17. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. De additamento in V u. app. nr. 24. 19. ποιούσῃ μῆκος F. 20. Ante μετά add. καὶ αὐτή BFb, m. 2 V. ποιοῦσα τὸ ὅλον b. 22. ποιοῦσα τὸ ὅλον V. 24. τὸ ὅλον μέσον b. 25. BE] E e corr. m. 1 P.

μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρζ'.

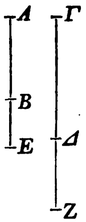
Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω· αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον το συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. καί εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ ΑΕ, ΕΒ σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγ-

---

3. *τῷ*] e corr. V. *εἰσίν* B. 4. *τό*] *τὸ μέν* Bb, *μέν* *supra scr.* m. 2 F. 5. *τῶν* ΓΖ — 6. ΕΒ] mg. m. 2 B (*τῶν ΑΕ, ΕΒ* etiam in textu sunt a m. 1). 6. *δ'* Fb. 12. *ὅπερ*



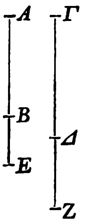
medium, $AE \times EB$ autem rationale [prop. LXXVII]. et eadem comparentur. similiter igitur atque antea [p. 336, 20 sq.] demonstrabimus, esse $\Gamma Z : Z\Delta = AE : EB$, et $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ ac $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$ commensurabilia esse. quare etiam ΓZ, $Z\Delta$ potentia incommensurabiles sunt efficientes $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ medium, $\Gamma Z \times Z\Delta$ autem rationale.

Ergo $\Gamma\Delta$ recta est cum rationali totum medium efficiens [prop. LXXVII]; quod erat demonstrandum.

CVII.

Recta rectae cum medio totum medium efficienti commensurabilis et ipsa recta cum medio totum medium efficiens est.

Sit AB recta cum medio totum medium efficiens, et rectae AB commensurabilis sit $\Gamma\Delta$. dico, etiam $\Gamma\Delta$ rectam esse cum medio totum medium efficientem.



nam BE rectae AB congruens sit, et eadem comparentur. itaque AE, EB potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium praetereaque summam quadratorum rectangulo incommensurabilem [prop. LXXVIII]. sunt autem, ut demonstratum est [p. 334, 14 sq.], AE, EB rectis ΓZ, $Z\Delta$ commensurabiles, et $AE^2 + EB^2$, $\Gamma Z^2 + Z\Delta^2$ ac $AE \times EB$, $\Gamma Z \times Z\Delta$

ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. De V u. app. nr. 25. 14. ποιούσῃ μήκει F. 18. ἔστω] om. BFb. 21. ἄρα] m. 2 euan. F. 25. αὐτόν F.

κειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπο τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ· καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν [τετραγώνων] τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρη΄.

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν δυναμένη τὸ ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται ἤτοι ἀποτομὴ ἢ ἐλάσσων.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΔΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ ΒΓ, μέσον δὲ τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ τῷ ΗΚ, ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον δὲ τὸ ΗΚ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ μὲν ἄρα ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ

---

1. τὸ δέ — 2. καί] mg. m. 2 F. 3. τε] om. P. 6. τετραγώνων] om. P. 8. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 10. Post ῥητοῦ del. καί F. 11. γίγνεται BFb. 12. ἐλάττων PVb. 13. ΒΓ] in ras. V. 14. λοιπὸν χωρίον BFb. τὸ ΕΓ δυναμένη BFb. 15. λόγων F, corr. m. 2. γίγνεται BFb. ἐλάττων B. 17. Post παραβεβλήσθω del. τὸ ΗΒ m. 1 P, ras. 4 litt. V. 18. ΔΒ] e corr. V, ΒΔ P. 19. ΕΓ] ΓΕ B. ΛΘ] ΘΛ F. 20. μέν] (prius) om. b. 21. ῥητόν] bis b. 23. παράκεινται BF. ἄρα ἐστίν BFb.

commensurabilia. quare etiam ΓZ, $Z\varDelta$ potentia incommensurabiles sunt efficientes summam quadratorum mediam et rectangulum medium praetereaque summam quadratorum rectangulo incommensurabilem.

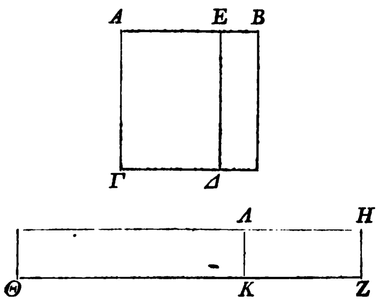
Ergo $\Gamma\varDelta$ recta est cum medio totum medium efficiens [prop. LXXVIII]; quod erat demonstrandum.

CVIII.

Spatio medio a rationali ablato recta reliquo spatio aequalis quadrata alterutra rectarum irrationalium est aut apotome aut minor.

nam a spatio rationali $B\Gamma$ medium auferatur $B\varDelta$. dico, rectam reliquo $E\Gamma$ aequalem quadratam alterutram rectarum irrationalium esse aut apotomen aut minorem.

ponatur enim rationalis ZH, et spatio $B\Gamma$ aequale rectae ZH adplicetur rectangulum $H\Theta$, spatio autem $\varDelta B$ aequale auferatur HK. itaque reliquum $E\Gamma = \varLambda\Theta$.



iam quoniam $B\Gamma$ rationale est, $B\varDelta$ autem medium, et $B\Gamma = H\Theta$, $B\varDelta = HK$, $H\Theta$ rationale est, HK autem medium. et rationali ZH adplicata sunt. itaque $Z\Theta$ rationalis est et rectae ZH longitudine commensurabilis [prop. XX], ZK autem rationalis et rectae ZH longitudine incommensurabilis [prop. XXII]. quare $Z\Theta$, ZK longitudine incommensurabiles sunt [prop.

ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΚ μήκει. αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. ἤτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ οὔ.

Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καί ἐστιν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρθ'.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων

---

1. ΖΗ] (prius) *ΗΖ* F. 2. Post *μήκει* (alt.) add. *καί εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί* b. 3. ΖΘ] ΘΖ BF. *εἰσιν* P. 4. *δέ*] *δ'* P. 5. Ζ*Κ* *φ*. *δή*] P, *δέ* BFb, et supra scr. m. 2 V. ΘΖ] ΖΘ b. 6. *ἀσυμμέτρου* P. *ἢ οὔ*] *ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου* BFb. *ἢ* — 7. *συμμέτρου*] mg. m. 1 P. 7. *τῷ*] corr. ex *τό* m. 1 b, m. rec. P. *ἀσυμμέτρου* P. 8. ΘΖ] corr. ex ΖΘ V, ΖΘ F. 9. *δέ* BFb. 10. *περιεχόμενον*] *om. BFb.* 11. *ἡ*] ins. m. 1 B. *τό*] (prius) ins. m. 2 V. *13. ΘΖ]* in ras. b, ΖΘ F. *τῆς*] *τῆι* b. *συμμέτρου* V, corr.

XIII]. itaque $Z\Theta$, ZK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. quare $K\Theta$ apotome est [prop. LXXIII], KZ autem ei congruens. iam ΘZ^2 excedit ZK^2 quadrato rectae aut commensurabilis aut incommensurabilis.

Prius excedat quadrato commensurabilis. et tota ΘZ rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est. quare $K\Theta$ apotome est prima [deff. tert. 1]. recta autem spatio comprehenso recta rationali et apotome prima aequalis quadrata apotome est [prop. XCI]. ergo recta spatio $\Lambda\Theta$, hoc est $E\Gamma$, aequalis quadrata apotome est.

sin ΘZ^2 excedit ZK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, et tota $Z\Theta$ rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $K\Theta$ apotome est quarta [deff. tert. 4]. recta autem spatio comprehenso recta rationali et apotome quarta aequalis quadrata minor est [prop. XCIV]; quod erat demonstrandum.

CIX.

Spatio rationali a medio ablato aliae duae rectae irrationales oriuntur aut mediae apotome prima aut recta cum rationali totum medium efficiens.

A medio enim $B\Gamma$ rationale auferatur $B\Delta$. dico, rectam spatio reliquo $E\Gamma$ aequalem quadratam alterutram rectarum irrationalium esse aut mediae apotomen

m. 2. 14. ΘZ BF. 15. ZH] corr. ex $Z\Theta$ m. 1 F. ἀποτομὴ ἄρα BFb. 16. δέ B. 17. Post ἐστίν add. ἡ ἄρα τὸ (om. b) $\Lambda\Theta$, τουτέστι τὸ $E\Gamma$, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν BF, mg. m. 1 b. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 19. Post ἀπό add. τοῦ b, m. 2 F. 20. γίγνονται B. μέση B. 22. ἀπό] corr. ex ὑπό V. ἀπό — $B\Delta$] bis b. 23. μία] om. b. λόγων b.

γίνεται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία. ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΚΖ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ ταύτῃ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ δευτέρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστίν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, καί ἐστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρι'.

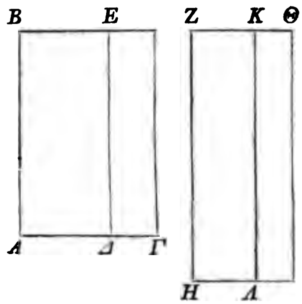
Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέ-

---

1. γίγνεται Bb. μέση Bb. 4. ἔστιν P. δή] corr. ex δέ m. 2 B, δέ Fb. 5. καί] om. φ. ΖΗ] ΖΙ b. ΖΚ B. 6. ΖΘ] ΘΖ P. εἰσιν P. 8. αὐτῇ BFb. δή] δέ BV. ΘΖ] in ras. m. 1 b. 10. συμμέτρου V, corr. m. 1. 11. ΘΖ] ΖΘ V. 14. Post ΖΗ add. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας ἡ δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη b, F mg. m. 2. 15. τουτέστιν P. μέση BF. ἐστι πρώτη V. 16. ΘΖ] in ras. V, ΖΘ P. 17. καί] ἑαυτῇ, καί BFb. 18. μήκει] om. b. 19. ΚΘ] ΘΚ F. Post ΕΓ del. χωρίον m. 1 P. 20. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 22. μέσου] (alt.) supra scr. m. 1 P, μέσον supra scr. m. 2 F.

primam aut rectam cum rationali totum medium efficientem.

ponatur enim rationalis ZH, et spatia similiter adplicentur. itaque eodem modo [p. 342, 19 sq.] sequitur, $Z\Theta$ rationalem esse et rectae ZH longitudine incommensurabilem, KZ autem rationalem et rectae ZH longitudine commensurabilem. itaque $Z\Theta$, ZK rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XIII]. ergo $K\Theta$ apotome est [prop. LXXIII], ei autem congruens ZK. iam ΘZ^2 excedit ZK^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis.



iam si ΘZ^2 excedit ZK^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et congruens ZK rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $K\Theta$ apotome est secunda [deff. tert. 2]. ZH autem rationalis est. quare recta spatio $\Lambda\Theta$, hoc est $E\Gamma$, aequalis quadrata mediae apotome est prima [prop. XCII]. sin ΘZ^2 excedit ZK^2 quadrato rectae incommensurabilis, et congruens ZK rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $K\Theta$ apotome est quinta [deff. tert. 5]. quare recta spatio $E\Gamma$ aequalis quadrata recta est cum rationali totum medium efficiens [prop. XCV]; quod erat demonstrandum.

CX.

Spatio medio a medio ablato toti incommensurabili *reliquae duae* irrationales oriuntur aut mediae apo-

τρον τῷ ὅλῳ αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ· λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκολούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ [προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΖΚ. ἤτοι δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ].

Εἰ μὲν δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐθετέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ τρίτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ

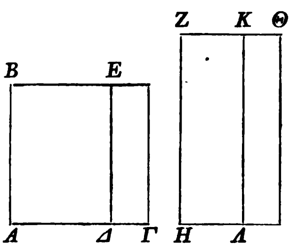
1. *γίγνονται* B. 2. *μέση* Bb. 5. *ΒΔ*] *Β* e corr. V. 6. *ἐστίν* B. 7. *μέση* Bb. *μετά*] *μετὰ τοῦ* P. 12. *ἐστιν* P. Deinde add. *ὑπόκειται* P, et V, sed del. 13. *καί*] *ἐστι καί* b, *ἐστιν καί* B. *αἱ*] *καὶ ἡ* b. ΖΘ] ΘΖ FV. 14. Ζ*Κ*] Θ*Κ* P. 15. *ἐστίν*] om. Bb. *προσαρμόζουσα* — 17. *ἑαυτῇ*] om. P, mg. V. 16. *δή*] *δέ* BV. 18. *δή*] *οὖν* BFb. ΖΘ] ΘΖ B. Ζ*Κ*] Ζ postea ins. V. 19. *οὐδετέρα* V. *τῶν*] corr. ex *τῷ* m. 2 V. ΖΘ] ΘΖ Bb et in ras. V. 20. *ἐστι*] om. Fb. 21. *ΚΛ*] corr. ex ΚΑ m. 2 F. δ'] δέ BFb. 23. *ἐστι* PBV, comp. Fb; item alt.

tome secunda aut recta cum medio totum medium efficiens.

Auferatur enim ut in figuris iam propositis [p. 347] a medio $B\Gamma$ spatium medium $B\Delta$ toti incommensurabile. dico, rectam spatio $E\Gamma$ aequalem quadratam alterutram esse rectarum irrationalium aut mediae apotomen secundam aut rectam cum medio totum medium efficientem.

nam quoniam utrumque $B\Gamma$, $B\Delta$ medium est, et $B\Gamma$, $B\Delta$ incommensurabilia[1]), similiter concludemus [p. 342, 19 sq.], utramque $Z\Theta$, ZK rationalem esse et rectae ZH longitudine incommensurabilem [prop. XXII]. et quoniam $B\Gamma$, $B\Delta$, hoc est $H\Theta$, HK, incommensurabilia sunt, etiam ΘZ, ZK incommensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. itaque $Z\Theta$, ZK rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo $K\Theta$ apotome est [prop. LXXIII].

iam si $Z\Theta^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et neutra rectarum $Z\Theta$, ZK rationali propositae ZH longitudine commensurabilis est, $K\Theta$ apotome est tertia [deff. tert. 3]. uerum $K\Lambda$ rationalis est, rectangulum autem recta rationali et apotome tertia comprehensum irrationale est, et recta ei aequalis quadrata irrationalis est, uocatur autem mediae apotome se-



1) Cum uerba καὶ ἀσύμμετρον τὸ $B\Gamma$ τῷ $B\Delta$ lin. 9—10 nihil faciant ad demonstrandum id, quod sequitur, non immerito ab Augusto omittuntur. Gregorius omisit ἔσται lin. 10 — τῷ $B\Delta$ lin. 12.

μέσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εἰ δὲ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ οὐθετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, ἀποτομὴ ἕκτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα. ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετα μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ρια΄.

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ. ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, ἐκ δύο ἄρα

---

1. *ἀποτομὴ μέση* B. *ὥσπερ* FV. *τό*] om. b. *τουτέστιν* B. *τό*] *ἡ τό* Bb. 2. *μέση* B. *ἐστὶν ἀποτομή* Fb. 3. ΖΘ] ΘΖ Bb et in ras. V. *συμμέτρου* V, corr. m. 1. 4. *μήκει*] om. PV. *οὐδετέρα* FV. 5. *ἐστι*] om. Bbφ. 6. *δέ* Bb. 7. *ἐστι*] *ἐστιν ἡ* BFb. *ἡ*] *ὥστε ἡ* BFb, et e corr. V. 8. *ἄρα*] del. V, om. BFb. *τουτέστιν* PB. Ante *τό* add. *ἡ* m. 2 F. *ἡ μετά* F. 9. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. B. 11. *τῇ*] supra scr. m. 1 b. 13. *ἡ ΑΒ*] (alt.) om. φ. 15. *ΔΓ*] in ras. m. 1 P. 16. *ῥητὴν τήν* BFb. In sequentibus *multa renouata* et euan. in F. 18. *ἄρα πρώτη* b. 19. *αὐτῇ*] *αὐτῇ ἡ* b. 21. *ἀσυμμέτρου* B, sed ἀ- eras. 23. *ἄρα*] om. Bb.

cunda [prop. XCIII]. ergo recta spatio $\Delta\Theta$, hoc est $E\Gamma$, aequalis quadrata mediae apotome est secunda.

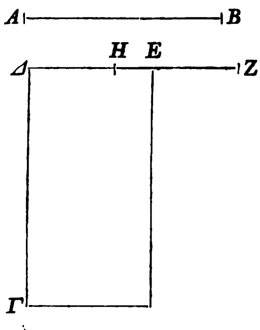
sin $Z\Theta^2$ excedit ZK^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, et neutra rectarum ΘZ, ZK rectae ZH commensurabilis est longitudine, $K\Theta$ sexta est apotome [deff. tert. 6]. recta autem spatio comprehenso recta rationali et apotome sexta aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens [prop. XCVI]. ergo recta spatio $\Delta\Theta$, hoc est $E\Gamma$, aequalis quadrata recta est cum medio totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

CXI.

Apotome eadem non est ac recta ex duobus nominibus.

Sit AB apotome. dico, AB eandem non esse ac rectam ex duobus nominibus.

nam, si fieri potest, sit. et ponatur rationalis $\Delta\Gamma$ et quadrato AB^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur rectangulum ΓE latitudinem efficiens ΔE. quoniam igitur



AB apotome est, ΔE apotome est prima [prop. XCVII]. sit EZ ei congruens. itaque ΔZ, ZE rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et ΔZ^2 excedit ZE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et ΔZ rationali propositae $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabilis est [deff. tert. 1]. rursus quoniam AB ex duobus nominibus est, ΔE ex duobus nominibus est prima [prop. LX]. in H in nomina diuidatur, et ΔH maius

ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ, ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ μεῖζον ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ. καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΖ μήκει. [ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ μήκει] ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ μήκει. αἱ ΗΖ, ΖΕ ἄρα ῥηταί [εἰσι] δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν η ΕΗ. ἀλλὰ καὶ ῥητή· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[Πόρισμα].

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί.

Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν

---

1. ὀνομάτων ἄρα Bb. ἐστὶ πρώτη F?, πρώτη supra scr. m. 2 V. διῃρημένη b, mg. m. 1: γρ. διῃρήσθω. 4. ΗΕ] ΕΗ F. τῷ] τό φ. 5. τὸ μεῖζον] P, et V, supra scr. ἡ; om. b, ἡ μείζων B; om. φ, sed post ΔΗ lacuna est 6 litt. 7. Ante μήκει del. τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει τῇ ΔΓ m. 1 b. λοιπῇ ἄρα τῇ BFV. ΗΖ] in ras. m. 1 b; ΖΗ F, seq. ras. 1 litt. 8. ἐστι τῇ] ἐστιν ἡ BVb et supra scr. ἡ φ. ἐπεί — 10. ΗΖ (prius)] om. P, mg. V. 9. ΗΖ] Ζ ante ras. 1 litt. V. ἐστιν] om. V. Post ῥητή in mg. m. 1 add. μήκει ἀσύμμετρος m. 1 b. ἐστίν B, om. V. 10. ἐπεί — μήκει] om.

nomen sit. itaque ΔH, HE rationales sunt potentia tantum commensurabiles, et ΔH^2 excedit HE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis, et maius nomen ΔH rationali propositae $\Delta \Gamma$ longitudine commensurabile est [deff. alt. 1]. itaque etiam ΔZ rectae ΔH longitudine commensurabilis est [prop. XII]. quare etiam reliqua HZ rectae ΔZ longitudine commensurabilis est [prop. XV]. uerum ΔZ, EZ longitudine incommensurabiles sunt. quare etiam ZH, EZ longitudine incommensurabiles sunt [prop. XIII]. itaque HZ, ZE rationales sunt potentia tantum commensurabiles. EH igitur apotome est [prop. LXXIII]. uerum eadem rationalis est; quod fieri non potest.

Ergo apotome eadem non est ac recta ex duobus nominibus; quod erat demonstrandum.

Apotome et irrationales eam sequentes neque mediae neque inter se eaedem sunt. nam quadratum mediae rectae rationali adplicatum latitudinem efficit rationalem et rectae, cui adplicatum est, longitudine incommensurabilem [prop. XXII], quadratum autem apotomes rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen primam [prop. XCVII], quadratum autem mediae apotomes primae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen secundam [prop. XCVIII], quadratum autem

---

PV. 11. EZ] mut. in ZE V. ἄρα ἐστί] δέ in ras. 4 litt. φ. 12. ἐστίν P. Post μήκει add. καί εἰσι ῥηταί mg. m. 2 B. 13. εἰσι] om. PV. 14. EH] corr. ex HE V, HE P, EN φ. 15. ἡ] (alt.) om. b. 16. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. BFb. 17. πόρισμα] om. P, ριγ' BVb, ρια' F. 21. τῇ] τι b. 22. ἀπό] om. F.

παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δέ, ἐπεὶ τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, δῆλον, ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμεναι αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολούθως ἑκάστη τῇ τάξει τῇ καθ' αὐτήν, αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολούθως, ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ιγ,

Μέσην,
Ἐκ δύο ὀνομάτων,
Ἐκ δύο μέσων πρώτην,
Ἐκ δύο μέσων δευτέραν,
Μείζονα,
Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην,

---

1. *τὸ δέ* — 3. *δευτέραν*] mg. m. 1 V. 5. *ἐλάττονος* Bb, *comp.* F. 9. *μετά*] om. F. 11. *οὖν*] corr. ex *οὐ* m. 1 P. 12. *πρώτου*] (prius) in ras. V. 13. ἐπεί] ὅτι B. 17. *παραβαλλόμενα* F, corr. m. 2. αἱ] om. P, supra scr. m. 1 V.

mediae apotomes secundae rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen tertiam [prop. XCIX], quadratum autem minoris rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quartam [prop. C], quadratum autem rectae cum rationali totum medium efficientis rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen quintam [prop. CI], quadratum autem rectae cum medio totum medium efficientis rationali adplicatum latitudinem efficit apotomen sextam [prop. CII]. iam quoniam latitudines, quas diximus, et a prima et inter se differunt, a prima, quia rationalis est, inter se autem, quia ordine eaedem non sunt, adparet, ipsas quoque irrationales inter se differre. Et quoniam demonstrauimus, apotomen eandem non esse ac rectam ex duobus nominibus [prop. CXI], et rationali adplicatae rectae irrationales apotomen sequentes latitudines efficiunt apotomas secundum suum quaeque ordinem, irrationales autem rectam ex duobus nominibus sequentes rectas ex duobus nominibus et ipsae secundum suum quaeque ordinem, aliae sunt irrationales apotomen sequentes, aliae irrationales rectam ex duobus nominibus sequentes, ita ut omnes XIII irrationales ordine hae sint:

1. Media.
2. Recta ex duobus nominibus.
3. Ex duabus mediis prima.
4. Ex duabus mediis secunda.
5. Maior.
6. Recta spatio rationali et medio aequalis quadrata.

μέν B, αἱ μέν b, μέν supra add. m. 2 F. 19. τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων] om. V. 20. αὐτάς b. εἰσιν ἄρα V. 21. αἱ] om. F. μετά] κατά P.

Δύο μέσα δυναμένην,
Ἀποτομήν,
Μέσης ἀποτομὴν πρώτην,
Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν,
Ἐλάσσονα,
Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν,
Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

[ριβ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ ἡ ΒΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ΒΓ.

Ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ,

De his 13 irrationalibus cfr. Martianus Capella VI, 720.

5. *ἐλάττονα* BFb. 8. *ριβ'*] om. b, *ρια'* F, *ριδ'* BV. 11. *τέ ἐστι* F. 12. *ὀνόμασιν* PBF. 15. *δὲ ὀνομάτων* V. 16. *ΔΓ*] *ΓΔ* F. 17. *ΒΓ*] *ΓΒ* F. 18. *ἐστι*] *ἐστιν* P. *ΓΔ*] *Γ* e corr. V. *ΔΒ*] *Δ* supra scr. m. 2 V. 19. *τάξιν ἕξει* V. *ἕξει*] *ἔχει* BFb, in B supra scr. ξ m. 2. 22. *ΒΔ*] *Δ* e corr. V, *ΔΒ* F. *τό*] *τῷ* PV. *τῷ*] mut. in *τό* m. 1 P, *τό* V. 23. Post *τῶν* ras. 1 litt. P. ΓΒ] ΒΓ F.

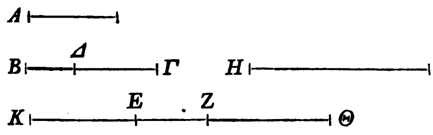
7. Recta duobus spatiis mediis aequalis quadrata.
8. Apotome.
9. Mediae apotome prima.
10. Mediae apotome secunda.
11. Minor.
12. Recta cum rationali totum medium efficiens.
13. Recta cum medio totum medium efficiens.

CXII.[1])

Quadratum rectae rationalis rectae ex duobus nominibus adplicatum latitudinem efficit apotomen, cuius nomina nominibus rectae ex duobus nominibus commensurabilia sunt praetereaque in eadem proportione, et praeterea apotome ita orta eundem ordinem habebit ac recta ex duobus nominibus.

Sit $\varDelta$ rationalis, $B\Gamma$ autem ex duobus nominibus, cuius maius nomen sit $\varDelta\Gamma$, et sit $B\Gamma \times EZ = \varDelta^2$. dico, EZ apotomen esse, cuius nomina rectis $\Gamma\varDelta$, $\varDelta B$ commensurabilia et in eadem proportione sint, et praeterea rectam EZ eundem ordinem habere ac $B\Gamma$.

nam rursus sit $B\varDelta \times H = \varDelta^2$. iam quoniam est $B\Gamma \times EZ = B\varDelta \times H$, erit $\Gamma B : B\varDelta = H : EZ$ [VI, 16].



uerum $\Gamma B > B\varDelta$. itaque etiam $H > EZ$ [V, 16; V, 14].

---

1) Dubito, an haec propositio et sequentes Euclidis non sint. sed de hac re alibi uiderimus.

οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. ἔστω τῇ Η ἴση ἡ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἐστιν, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ· ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ, ΚΖ, ΚΕ ἀνάλογόν εἰσιν. σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ, ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς Α, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ

1. μείζων — 2. ἔστω] in ras. V. 1. ΓΒ] ΒΓ P. 2. ἐστί] om. V. 3. ΓΒ] ΒΓ PV. 4. τήν] om. Bb. 5. τήν] om. Bb. ΔΒ FVb. τήν] om. BFb. γεγονέτω — 6. ΖΕ] om. b. 6. τήν] om. BF. ΖΚ] ΚΖ B. τήν] om. BFb. 7. πρός] bis φ. 8. τὴν ΚΕ FV. ὡς γάρ] om. P, supra scr. V. τῶν] om. P. ἡγούμενον P. 10. τὴν ΚΕ V. 11. ΔΒ] ΒΔ F. τὴν ΚΖ BFb. 12. ΔΒ] e corr. V.

sit $E\Theta = H$. itaque $\Gamma B : B\Delta = \Theta E : EZ$. quare dirimendo [V, 17] $\Gamma\Delta : B\Delta = \Theta Z : ZE$. fiat $\Theta Z : ZE = ZK : KE$. quare etiam $\Theta K : KZ = ZK : KE$; nam ut unum praecedentium ad unum sequentium, ita omnia praecedentia ad omnia sequentia [V, 12]. est autem $ZK : KE = \Gamma\Delta : \Delta B$. quare etiam $\Theta K : KZ = \Gamma\Delta : \Delta B$. uerum $\Gamma\Delta^2$, ΔB^2 commensurabilia sunt [prop. XXXVI]. itaque etiam ΘK^2, KZ^2 commensurabilia sunt [VI, 20 coroll.; prop. XI]. est autem $\Theta K^2 : KZ^2 = \Theta K : KE$, quoniam tres rectae ΘK, KZ, KE proportionales sunt [V def. 9]. itaque ΘK, KE longitudine commensurabiles sunt [prop. XI]. quare etiam ΘE, EK longitudine commensurabiles sunt [prop. XV]. et quoniam $A^2 = E\Theta \times B\Delta$, et A^2 rationale est, etiam $E\Theta \times B\Delta$ rationale est. et rationali $B\Delta$ adplicatum est. itaque $E\Theta$ rationalis est et rectae $B\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. quare etiam EK, quae ei commensurabilis est, rationalis est [def. 3] et rectae $B\Delta$ longitudine commensurabilis [prop. XIII]. iam quoniam est $\Gamma\Delta : \Delta B = ZK : KE$, et $\Gamma\Delta$, ΔB potentia tantum commensurabiles sunt, etiam ZK, KE potentia tantum

---

$B\Delta$ F. 13. ΘK] $\Gamma\Delta$ φ. 14. KZ] ZK in ras. V. 15. Post KZ add. *ἐδείχθη γὰρ ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς ΔB, οὕτως ἡ ZK πρὸς $K\Theta$. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς ΔB, οὕτως ἡ ΘK πρὸς KE. τρεῖς οὖν εὐθεῖαί εἰσιν ἀνάλογον πρώτη μὲν ἡ ΘK, δευτέρα δὲ ἡ KZ, τρίτη ἡ KE. ἔστιν οὖν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας εἶδος, οὕτως ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τουτέστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΘK πρὸς τὸ ἀπὸ KZ* b. *τήν*] om. b. 16. *εἰσι* BVb, comp. F. 17. *ἄρα ἐστίν* BFb. ΘK] K e corr. V. Post *μήκει* add. *καὶ διελόντι* b, m. 2 F. *ὥστε*] -*τε* e corr. V. EK] $E\Theta$ b. 19. $E\Theta$] ΘE V. *ἐστιν* L. 20. *ἐστίν* L. ΔB LBFb, e corr. V. 21. ΔB BF. 22. Post *ὥστε* ras. 1 litt. V. 23. *ἐστιν* L. ΔB F. 24. *ὡς*] om. L, supra scr. m. 2 B. 25. ZK] corr. ex ZH m. 2 F. *δέ*] m. 2 F. $\Gamma\Delta$] $\Delta\Gamma$ F. εἰσίν L.

σύμμετροι, καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΚ. αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ.

Ἤτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου [ἑαυτῇ], καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ.

Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΔ, ΔΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριγ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς

1. ΚΕ ἄρα LBF. 2. Post ΚΕ add. καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει LBFb. ἐστιν ἄρα V. ἐστίν LPB. 3. ΖΚ] (prius) ΚΖ BFb (de L non liquet). Deinde add. καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει LBFb. ῥηταί εἰσιν L, ῥηταί εἰσι BFb. εἰσί] om. LBFb. 4. ΕΖ] ΖΕ in ras. V. 6. τῷ] supra scr. m. rec. V. συμμέτρου V, sed corr. 8. ἀσυμμέτρου L, et V, sed ἀ- eras. ἑαυτῇ] om. P. ΖΚ] ΚΖ B. 11. ΒΔ] mut. in ΔΒ V, ΔΒ b. οὐθετέρα P. 12. καί — 13. ΔΒ] mg. m. 2 F. 12. οὐθετέρα P. ΚΕ] Ε in ras. m. 1 P. 13.

commensurabiles sunt [prop. XI]. uerum KE rationalis est; itaque etiam ZK rationalis est. itaque ZK, KE rationales sunt potentia tantum commensurabiles. ergo EZ apotome est [prop. LXXIII].

Iam $\Gamma\Delta^2$ excedit ΔB^2 quadrato rectae aut sibi commensurabilis aut incommensurabilis.

si igitur $\Gamma\Delta^2$ excedit ΔB^2 quadrato rectae commensurabilis, etiam ZK^2 excedit KE^2 quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. et siue $\Gamma\Delta$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam ZK ei commensurabilis est [prop. XI, XII], siue $B\Delta$, etiam KE [prop. XII], siue neutra rectarum $\Gamma\Delta$, ΔB, neutra rectarum ZK, KE. sin $\Gamma\Delta^2$ excedit ΔB^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam ZK^2 excedit KE^2 quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XIV]. et siue $\Gamma\Delta$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam ZK ei commensurabilis est, siue $B\Delta$, etiam KE, siue neutra rectarum $\Gamma\Delta$, ΔB, neutra rectarum ZK, KE. ergo ZE apotome est, cuius nomina ZK, KE nominibus $\Gamma\Delta$, ΔB rectae ex duobus nominibus commensurabilia sunt et in eadem proportione, et eundem ordinem habet ac $B\Gamma$ [deff. alt. et tert.]; quod erat demonstrandum.

CXIII.

Quadratum rectae rationalis apotomae adplicatum latitudinem efficit rectam ex duobus nominibus, cuius

ΔB] $B\Delta$? L. 14. καί — 15. ἑαυτῇ] om. P, mg. m. 2 V. 16. ἐστιν L. Ante ZK eras. H V. 17. οὐθετέρα V. 18. οὐθετέρα PVφ (non F). ὥστε] -ε in ras. V. 19. τά] (alt.) om. P, m. 2 V. ἐστιν L. 20. ἐκ] ἐκ τῶν V. ὀνόμασιν LPBF. 21. ἔχει τάξιν LBFb. ΒΓ] ΒΒ P. 23. ριγ'] PL, ριβ' F, ριδ' b, ριε' BV. 24. παρά] αρα L.

τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ἀποτομῇ.

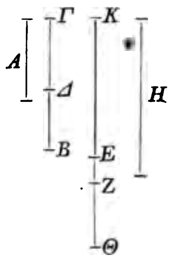
Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ *Α*, ἀποτομὴ δὲ ἡ *ΒΔ*, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *Α* ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν *ΒΔ*, *ΚΘ*, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς *Α* ῥητῆς παρὰ τὴν *ΒΔ* ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν *ΚΘ*· λέγω, ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ *ΚΘ*, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς *ΒΔ* ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ *ΚΘ* τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ *ΒΔ*.

Ἔστω γὰρ τῇ *ΒΔ* προσαρμόζουσα ἡ *ΔΓ*· αἱ *ΒΓ*, *ΓΔ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *Α* ἴσον ἔστω καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΒΓ*, *Η*. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *Α*· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΒΓ*, *Η*. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν *ΒΓ* παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *Η* καὶ σύμμετρος τῇ *ΒΓ* μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν *ΒΓ*, *Η* ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν *ΒΔ*, *ΚΘ*, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ *ΓΒ* πρὸς *ΒΔ*, οὕτως ἡ *ΚΘ* πρὸς *Η*. μείζων δὲ ἡ *ΒΓ* τῆς *ΒΔ*· μείζων ἄρα καὶ ἡ *ΚΘ* τῆς *Η*. κείσθω τῇ *Η* ἴση ἡ *ΚΕ*· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΚΕ* τῇ *ΒΓ* μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ *ΓΒ* πρὸς *ΒΔ*, οὕτως ἡ *ΘΚ* πρὸς *ΚΕ*, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ *ΒΓ* πρὸς τὴν *ΓΔ*, οὕτως ἡ *ΚΘ* πρὸς *ΘΕ*. γεγονέτω ὡς ἡ *ΚΘ* πρὸς *ΘΕ*, οὕτως ἡ *ΘΖ* πρὸς *ΖΕ*· καὶ λοιπὴ

---

1. *ἐστιν* L. 2. *ὀνόμασιν* PLBF. *γιγνομένη* LBb, *γενομένη* PVφ. 3. *ἔχει*] supra add. ξ m. 2 B. 6. *Α*] *ΑΒ* b. *ὥστε*] -ε in ras. V. 7. *ΒΔ*] *ΔΒ* φ. 8. *ποιεῖν* LFb, e corr. m. 1 B. *ὅτι*] *ὅτι καί* PV. 9. *ἐστι*] *ἐστιν* L. 10. *ὀνόμασιν* PLBF. *ἔτι*] *ὅτι* LBFb. 11. *ἕξει* LB. 13. *εἰσιν* L. 14. *καί*] om. LBFVb. 15. Η] m. 2 F. 18. *ἐστίν* PV, om. LBFb. 19. ΓΒ] ΒΓ PV. 20. τῆς] (prius) πρός b.

nomina nominibus apotomes commensurabilia sunt et in eadem proportione, et praeterea recta ex duobus nominibus ita orta eundem ordinem habet atque apotome.



Sit A rationalis, $B\Delta$ autem apotome, et sit $B\Delta \times K\Theta = A^2$, ita ut quadratum rectae rationalis A apotomae $B\Delta$ adplicatum latitudinem efficiat $K\Theta$. dico, $K\Theta$ ex duobus nominibus esse, cuius nomina nominibus rectae $B\Delta$ commensurabilia sint et in eadem proportione, et praeterea $K\Theta$ eundem ordinem habere ac $B\Delta$.

nam $\Delta\Gamma$ rectae $B\Delta$ congruens sit. itaque $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. LXXIII]. sit etiam $B\Gamma \times H = A^2$. uerum A^2 rationale est. itaque etiam $B\Gamma \times H$ rationale est. et rationali $B\Gamma$ adplicatum est. itaque H rationalis est et rectae $B\Gamma$ longitudine commensurabilis [prop. XX]. iam quoniam est $B\Gamma \times H = B\Delta \times K\Theta$, erit [VI, 16] $\Gamma B : B\Delta = K\Theta : H$. est autem $B\Gamma > B\Delta$. itaque etiam $K\Theta > H$ [V, 16; V, 14]. ponatur $KE = H$. itaque KE, $B\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt. et quoniam est $\Gamma B : B\Delta = \Theta K : KE$, conuertendo [V, 19 coroll.] est $B\Gamma : \Gamma\Delta = K\Theta : \Theta E$. fiat $K\Theta : \Theta E = \Theta Z : ZE$. itaque etiam $KZ : Z\Theta = K\Theta : \Theta E = B\Gamma : \Gamma\Delta$ [V, 19]. uerum $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ potentia tantum commensurabiles sunt. itaque etiam KZ, $Z\Theta$ potentia tantum commensura-

---

ἄρα ἐστί BFb. 21. KE] e corr. V, EK P. 22. τὴν $B\Delta$ BFb. 23. τὴν KE BFb. 25. $K\Theta$] corr. ex. KH m. 2 F.

ἄρα ἡ *ΚΖ* πρὸς *ΖΘ* ἐστιν, ὡς ἡ *ΚΘ* πρὸς *ΘΕ*, τουτέστιν [ὡς] ἡ *ΒΓ* πρὸς *ΓΔ*. αἱ δὲ *ΒΓ*, *ΓΔ* δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι· καὶ αἱ *ΚΖ*, *ΖΘ* ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ *ΚΘ* πρὸς *ΘΕ*, ἡ *ΚΖ* πρὸς *ΖΘ*, ἀλλ' ὡς ἡ *ΚΘ* πρὸς *ΘΕ*, ἡ *ΘΖ* πρὸς *ΖΕ*, καὶ ὡς ἄρα ἡ *ΚΖ* πρὸς *ΖΘ*, ἡ *ΘΖ* πρὸς *ΖΕ*· ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ *ΚΖ* πρὸς *ΖΕ*, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς *ΚΖ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΖΘ*. σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς *ΚΖ* τῷ ἀπὸ τῆς *ΖΘ*· αἱ γὰρ *ΚΖ*, *ΖΘ* δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ΚΖ* τῇ *ΖΕ* μήκει· ὥστε ἡ *ΚΖ* καὶ τῇ *ΚΕ* σύμμετρός [ἐστι] μήκει. ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ *ΚΕ* καὶ σύμμετρος τῇ *ΒΓ* μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ *ΚΖ* καὶ σύμμετρος τῇ *ΒΓ* μήκει. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ *ΒΓ* πρὸς *ΓΔ*, οὕτως ἡ *ΚΖ* πρὸς *ΖΘ*, ἐναλλὰξ ὡς ἡ *ΒΓ* πρὸς *ΚΖ*, οὕτως ἡ *ΔΓ* πρὸς *ΖΘ*. σύμμετρος δὲ ἡ *ΒΓ* τῇ *ΚΖ*· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ *ΖΘ* τῇ *ΓΔ* μήκει. αἱ *ΒΓ*, *ΓΔ* δὲ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ *ΚΖ*, *ΖΘ* ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα ἡ *ΚΘ*.

Εἰ μὲν οὖν ἡ *ΒΓ* τῆς *ΓΔ* μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ *ΚΖ* τῆς *ΖΘ* μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ *ΒΓ* τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ *ΚΖ*, εἰ δὲ ἡ

---

1. ΖΘ] ΘΖ F et in ras. V. *ΘΕ*] corr. ex ΖΕ V. *τουτέστιν* — 2. *πρός*] in ras. V. 2. *ὡς*] om. P, supra scr. V. *δέ*] om. BF. *ΓΔ*] *ΓΔ*, *Δ*Ε BF. 3. *εἰσί*] om. PV. *σύμμετροι* — 4. *εἰσί*] mg. m. 2 B. 3. *ΚΖ*] Ζ*Κ* P. 5. ΖΘ] ΘΖ in ras. V. ΘΖ] in ras. m. rec. B. 6. ΖΘ] in ras. m. rec. B, "ΘΖ b. *οὕτως ἡ* B. ΘΖ] 'ΖΘ b. 7. ΖΕ] ΕΖ F. *ὥστε*] -*ε* in ras. V. *ὡς*] m. 2 F. *οὕτως τό* BFb. 8. *πρώτης*] eras. F. *πρός* — *δευτέρας*] mg. m. 2 F. 9. ΖΕ]

biles sunt [prop. XI]. et quoniam est $K\Theta : \Theta E = KZ : Z\Theta$, $K\Theta : \Theta E = \Theta Z : ZE$, erit etiam

$$KZ : Z\Theta = \Theta Z : ZE.$$

quare etiam ut primum ad tertium, ita quadratum primi ad quadratum secundi [V def. 9]. itaque etiam $KZ : ZE = KZ^2 : Z\Theta^2$. uerum KZ^2, $Z\Theta^2$ commensurabilia sunt; nam KZ, $Z\Theta$ potentia commensurabiles sunt. itaque etiam KZ, ZE longitudine commensurabiles sunt [prop. XI]. quare etiam KZ, KE longitudine commensurabiles sunt [prop. XV]. KE autem rationalis est et rectae $B\Gamma$ longitudine commensurabilis. itaque etiam KZ rationalis est et rectae $B\Gamma$ longitudine commensurabilis [prop. XII]. et quoniam est $B\Gamma : \Gamma\Delta = KZ : Z\Theta$, permutando [V, 16] est $B\Gamma : KZ = \Delta\Gamma : Z\Theta$. uerum $B\Gamma$, KZ commensurabiles sunt. itaque etiam $Z\Theta$, $\Delta\Gamma$ longitudine commensurabiles sunt [prop. XI]. $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ autem rationales sunt potentia tantum commensurabiles. itaque etiam KZ, $Z\Theta$ rationales sunt [def. 3] potentia tantum commensurabiles [prop. XIII]. ergo $K\Theta$ ex duobus nominibus est [prop. XXXVI].

Iam si $B\Gamma^2$ excedit $\Gamma\Delta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis, etiam KZ^2 excedit $Z\Theta^2$ quadrato rectae sibi commensurabilis [prop. XIV]. et siue $B\Gamma$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam KZ

---

corr. ex $Z\Theta$ P. 11. *γάρ*] *ἄρα* B. 12. *τῇ*] *τῆς* Vb. *ὥστε*] -*ε* in ras. V, *ὥστε καί* b. 13. *ἐστι*] om. PV. 14. *ἀσύμμετρος* b. 16. *πρός*] (prius) bis b. 17. *οὕτως* — 18. KZ] bis F. 17. $\Delta\Gamma$] $\Gamma\Delta$ P. 18. $Z\Theta$] in ras. V, ΘZ P. $\Gamma\Delta$] in ras. V, $\Delta\Gamma$ P. 19. *αἱ*] *αἱ δέ* V. *δέ*] om. FV, ΔE Bb. 20. *καί* — 21. $K\Theta$] mg. m. 1 V. 20. KZ] $K\Theta$ B. 21. *δύο ἄρα* BFb. *ἄρα*] om. BFb. 22. $\Gamma\Delta$] $B\Delta$ PFb et B eras. V. 23. *ἀσυμμέτρου* F, sed corr. 24. ἀσυμμέτρου P.

ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρά [ἐστι] τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριδ΄.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω τὸ ΓΕ, καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ, ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ

---

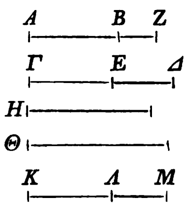
1. *ΓΔ*] *ΔΓ* B et e corr. V. 2. *ΒΓ — τῶν*] postea add. m. 1 P. Post *ΓΔ* add. *καί* b, m. 2 F. 4. *δύνηται* Bb. 5. *συμμέτρου* V, sed. corr. *ΚΖ*] Ζ e corr. V, *ΚΔ* P. *ΖΘ*] *ΘΖ* in ras. V. 6. *συμμέτρου* V, sed corr. 7. *ἐστιν*] m. 2 F. 8. ΖΘ] ΘΖ F. *ΓΔ καί* b. 11. *σύμμετα* B. *ἐστι*] *om. P,* supra scr. V. *ὀνόμασιν* B. 13. *ΒΓ*] *ΒΔ* PFb. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BFb. 14. ριε΄ b et e corr. F, *ρις΄ BV.* 17. *τε*] om. BFV. ὀνόμασιν PFB. 19. ἐστι

ei commensurabilis est [prop. XII], siue $\Gamma\Delta$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam $Z\Theta$ ei commensurabilis est [id.], siue neutra rectarum $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, etiam neutra rectarum KZ, $Z\Theta$ [prop. XIII]. sin $B\Gamma^2$ excedit $\Gamma\Delta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis, etiam KZ^2 excedit $Z\Theta^2$ quadrato rectae sibi incommensurabilis [prop. XIV]. et siue $B\Gamma$ rationali propositae longitudine commensurabilis est, etiam KZ ei commensurabilis est, siue $\Gamma\Delta$, etiam $Z\Theta$ [prop. XII], siue neutra rectarum $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, neutra rectarum KZ, $Z\Theta$.

Ergo $K\Theta$ ex duobus nominibus est, cuius nomina KZ, $Z\Theta$ nominibus apotomes $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ commensurabilia sunt et in eadem proportione, et praeterea $K\Theta$ eundem ordinem habet ac $B\Gamma$ [cfr. deff. alt. et tert.]; quod erat demonstrandum.

CXIV.

Si spatium comprehenditur apotome et recta ex duobus nominibus, cuius nomina nominibus apotomes et commensurabilia sunt et in eadem proportione, recta spatio aequalis quadrata rationalis est.



Spatium enim $AB \times \Gamma\Delta$ comprehendatur apotome AB et recta ex duobus nominibus $\Gamma\Delta$, cuius nomen maius sit ΓE, et ΓE, $E\Delta$ nomina rectae ex duobus nominibus nominibus apotomes AZ, ZB et commensurabilia sint et in eadem

B, comp. FVb. 20. γάρ] corr. ex τό m. 1 V. 22. ἔστω] τε] m. 2 B. (prius) ἐστι BFb. 23. $E\Delta$] Δ e corr. m. 1 b. 24. ὀνόμασιν B.

λόγῳ, καὶ ἔστω ἡ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω, ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ, ΜΛ σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ, ΕΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ σύμμετροί τέ εἰσι ταῖς ΑΖ, ΖΒ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς ΜΛ. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΛΜ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστιν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς ΚΜ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ. καί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΚΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΚΛ τῷ ἀπο τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς Θ. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η. καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστιν.

---

1. *ἡ*] om. BFb. *ἡ*] e corr. V. *Η*] *ΗΛ* b. 3. *Θ*] (prius) *ΒΘ* F. 4. *τήν*] (prius) m. 2 F. 6. *τῆς ἐκ*] *ἐκ τῶν* V. 7. *ἀλλά* — 9. *λόγῳ*] mg. m. 1 F. 8. *τοῖς* b. 9. *ΑΖ*] corr. ex *ΑΓ* V. 11. ΒΖ] ΖΒ B. 12. ἡ] (prius) post *ras. 1 litt.* F. 13. πρός — ΑΖ] om. F. τὴν ΚΜ BFb.

proportione, et sit $H^2 = AB \times \Gamma\Delta$. dico, H rationalem esse.

ponatur enim rationalis Θ, et spatium quadrato Θ^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur latitudinem efficiens $K\Lambda$. itaque $K\Lambda$ apotome est, cuius nomina sint KM, $M\Lambda$ commensurabilia ΓE, $E\Delta$ nominibus rectae ex duobus nominibus et in eadem proportione [prop. XCII]. uerum ΓE, $E\Delta$ etiam rectis AZ, ZB et commensurabilia sunt et in eadem proportione. itaque $AZ : ZB = KM : M\Lambda$. quare permutando [V, 16] $AZ : KM = BZ : \Lambda M$. itaque etiam $AB : K\Lambda = AZ : KM$ [V, 19]. uerum AZ, KM commensurabiles sunt [prop. XII]. itaque etiam AB, $K\Lambda$ commensurabiles sunt [prop. XI]. est autem $AB : K\Lambda = \Gamma\Delta \times AB : \Gamma\Delta \times K\Lambda$ [VI, 1]. itaque etiam $\Gamma\Delta \times AB$ et $\Gamma\Delta \times K\Lambda$ commensurabilia sunt [prop. IX]. uerum $\Gamma\Delta \times K\Lambda = \Theta^2$. itaque $\Gamma\Delta \times AB$ et Θ^2 commensurabilia sunt. est autem $H^2 = \Gamma\Delta \times AB$. quare H^2, Θ^2 commensurabilia sunt. uerum Θ^2 rationale est. itaque etiam H^2 rationale est. quare H rationalis est; et spatio $\Gamma\Delta \times AB$ aequalis est quadrata.

Ergo si spatium comprehenditur apotome et recta ex duobus nominibus, cuius nomina nominibus apotomes et commensurabilia sunt et in eadem proportione, recta spatio aequalis quadrata rationalis est.

---

14. *ἐστίν* B. AB] *KM σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ* φ (et F?). 15. *τὴν ΚΛ* BFb. *οὕτω* B. $\Gamma\Delta$] ante lacunam 2 litt. F, $A\Gamma$ b. AB] ΔB b. *πρὸς τό*] om. φ. 16. *τό*] m. 2 V. 17. *τῶν*] (prius) om. P. 18. Θ] ΘZ B, sed corr. 19. *ἀπό*] corr. ex *ὑπό* m. 2 F. *τῷ*] corr. ex *τό* m. 1 F. *τό*] corr. ex *τῷ* m. 1 F. 20. *τό*] *καὶ τό* BFb. 22. ῥητή] corr. ex *ῥητόν* V. 25. *ἐστιν* P. 26. ὀνόμασιν PB. 27. *ἐστι* BV, *comp.* Fb. Deinde add. ὅπερ ἔδει δεῖξαι F.

Πόρισμα.

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτου φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ριε'.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Α ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστιν. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν δὴ τῷ ὑπο τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ· καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαινούσης φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

---

1. *πόρισμα*] mg. PV, om. BFb. 4. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BFb. 5. *ριε'*] om. V, *ρις'* b et corr. ex *ριδ'* F, *ριζ'* B. 6. *γίγνονται* B, *γ* supra add. m. 1 P. 7. *οὐδεμία*] om. PFVb. Post *πρότερον* add. *δεκατριῶν ἀλόγων* m. rec. F. 9. *γίγνονται* PFB. *οὐδεμία*] om. PFVb. 10. *ἡ*] *ἔστιν ἡ* BF. 11. Ante *B* ras. 1 litt. B. *B, A*] *A, B* F. 12. *ἔστω*] m. 2 F. *τό*] (prius) *τῷ* F. 13. *ἐστί* PB, comp. FVb. 14. *ἀπό* B. *16. ἄλογον* — 17. *Δ* (prius)] om. FV. 17. *ἐστίν* P. *τό — ἐστίν*] *om. P.* *ἄλογος* — 18. *αὐτή*] in ras. m. 1 F. 18. *ἀπό* B.

Corollarium.

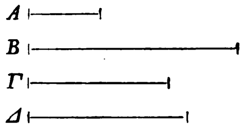
Et hinc quoque nobis adparuit, fieri posse, ut spatium rationale rectis irrationalibus comprehendatur. — quod erat demonstrandum.

CXV.

A media irrationales infinitae multitudinis oriuntur, et nulla eadem est atque ulla priorum.

Sit A media. dico, ab A irrationales infinitae multitudinis oriri et nullam eandem esse atque ullam priorum.

ponatur rationalis B, et sit $\Gamma^2 = B \times A$. itaque Γ irrationalis est [def. 4]; nam spatium recta irrationali et rationali comprehensum irrationale est [prop. XX]. nec eadem est atque ulla priorum; neque enim ullius priorum quadratum rectae rationali adplicatum latitudinem efficit mediam. rursus sit $\Delta^2 = B \times \Gamma$. itaque Δ^2 irrationale est [prop. XX]. quare Δ irrationalis est [def. 4]. nec eadem est atque ulla priorum; neque enim ullius priorum quadratum rectae rationali adplicatum latitudinem efficit Γ. iam hac ordinatione similiter in infinitum progrediente adparet, a media irrationales infinitae multitudinis oriri, et nullam eandem esse atque ullam priorum; quod erat demonstrandum.



20. *τῆς τοιαύτης*] *τοῖς τῆς αὐτῆς φ*. 21. *προβαίνουσαι* B, corr. m. 2. 22. *γίγνονται* B. *οὐδεμία*] om. PFVb. 23. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BFb, comp. P. Seq. additamenta quaedam, u. app. In fine libri *Εὐκλείδου στοιχείων ῑ* P, *τέλος τοῦ ῑ τῶν Εὐκλείδου στοιχείων* m. 2 B, *τέλος τοῦ ῑ τῶν Εὐκλείδου στοιχείων τῆς Θέωνος ἐκδόσεως* F, *Εὐκλείδου* λόγος ῑ τῆς Θέωνος ἐκδόσεως b.

APPENDIX.

1.

Ad libr. X prop. 1.

Ἄλλως τὸ α′ θεώρημα.

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ *AB*, *Γ*· καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ *Γ*, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ *AB* μεγέθους μεῖζον. γεγονέτω ὡς τὸ *ZM* καὶ διῃρήσθω εἰς [τὰ] ἴσα τῷ *Γ*, καὶ ἔστω τὰ *MΘ*, *ΘH*, *HZ*, καὶ ἀπὸ τοῦ *AB* ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ *BE*, καὶ ἀπὸ τοῦ *EA* μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ *EΔ*, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως αἱ ἐν τῷ *ZM* διαιρέσεις ἴσαι γένωνται ταῖς ἐν τῷ *AB* διαιρέσεσιν. γεγονέτωσαν ὡς αἱ *BE*, *EΔ*, *ΔA*, καὶ τῷ *ΔA* ἕκαστον τῶν *KΛ*, *ΛN*, *NΞ* ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γινέσθω, ἕως αἱ διαιρέσεις τοῦ *KΞ* ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ *ZM*.

Καὶ ἐπεὶ τὸ *BE* μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ *BA*, τὸ *BE* μεῖζόν ἐστι τοῦ *EA*· πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ *ΔA*. ἀλλὰ τὸ *ΔA* ἴσον ἐστὶ τῷ *ΞN*· τὸ *BE* ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ *NΞ*. πάλιν, ἐπεὶ τὸ *EΔ* μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ *EA*, μεῖζόν ἐστι τοῦ *ΔA*. ἀλλὰ τὸ *ΔA* ἐστιν ἴσον τῷ *NΛ*· τὸ *EΔ* ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ

1. Post ἀφαιρούμενα p. 6, 10 habent BFVb, mg. m. 1 postea add. P.

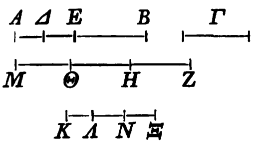
1. τὸ α′ θεώρημα] om. V, τὸ αὐτό BFb (mg. α B). 2. κείσθω V. 3. ἔλαττον F. 5. τά] (prius) om. P. *Γ*] corr. ex *A* B. καὶ ἔστω] om. FVb. HZ] IZ F. 6. ἤ] m. 2 P. 7. *BE*] in ras. V. καί — EΔ] mg. m. 2 V. EA]

1.

Ad libr. X prop. 1.

Aliter primum theorema.

Ponantur duae magnitudines inaequales AB, Γ. et quoniam est $\Gamma < AB$, multiplicata aliquando Γ maior erit magnitudine AB. fiat ZM et in partes magnitudini Γ aequales diuidatur, et sint $M\Theta$, ΘH, HZ, et ab AB auferatur BE maior dimidia et ab EA maior dimidia $E\Delta$, et hoc semper deinceps fiat, donec diuisiones rectae ZM diuisionibus rectae AB numero aequales sint. sint BE, $E\Delta$, ΔA, et sit



$$K\Lambda = \Lambda N = N\Xi = \Delta A,$$

et hoc fiat, donec diuisiones magnitudinis $K\Xi$ diuisionibus rectae ZM numero aequales sint.

et quoniam $BE > \frac{1}{2} BA$, erit $BE > EA$. itaque multo magis $BE > \Delta A$. uerum $\Delta A = \Xi N$. itaque $BE > N\Xi$. rursus quoniam $E\Delta > \frac{1}{2} EA$, erit $E\Delta > \Delta A$. uerum $\Delta A = N\Lambda$. itaque $E\Delta > N\Lambda$. itaque tota

---

AE P. 8. *ἀεί*] om. BFVb. *γιγνέσθω* F. 9. *διαιρέσεσι* BFVb. 10. *τῷ*] corr. ex *τό* m. 2 V. 11. *γιγνέσθω* φ. *ἕως*] *ἕως ἄν* Vφ. *αἱ*] om. φ. 12. *γένονται* Pφ. *ταῖς*] *εἰς τάς* φ. 13. *BA*] corr. ex *AB* m. 2 V. 14. *τό*] *τὸ δέ* B, *τοῦ* φ. *ἐστι*] (prius) om. F. 16. *τοῦ* — *μεῖζον*] om. B. 17. *τοῦ ΔA* — 18. *ἴσον*] τὸ EA — μεῖζον δέ ἐστι τὸ ΔA φ. 18. *ἴσον ἐστί* Vb. *EΔ*] in ras. V.

ΝΑ. ὅλον ἄρα τὸ ΔΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΑ. ἴσον δὲ τὸ ΔΑ τῷ ΑΚ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. ἀλλὰ τοῦ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τὸ ΜΖ· πολλῷ ἄρα τὸ ΜΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. καὶ ἐπεὶ τὰ ΞΝ, ΝΑ, ΑΚ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΜΘ, ΘΗ, ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον το πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ ΞΚ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΖΗ, οὕτως τὸ ΚΞ πρὸς τὸ ΖΜ. μεῖζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΚΞ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΖ τοῦ ΑΚ. καί ἐστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΑ τῷ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.

Ad libr. X prop. 6.

Ἄλλως τὸ ϛ΄.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Γ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς προς τὸν Γ ἀριθμόν, τὸ Ε πρὸς τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τὸ Α πρὸς τὸ Β· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ, τὸ Ε πρὸς τὸ Β. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἑκάτερον τῶν Α, Β

---

2. Post *δεῖξαι* p. 22, 2 BFVb, mg. m. 1 P.

---

1. *ΔΒ*] *ΒΔ* P. 2. *τό*] (prius) *τῷ* B. *τῷ*] *τοῦ* b. 3. *τό*] *corr. ex τοῦ* m. 1 F. 4. *μεῖζόν ἐστι τὸ ΜΖ* b. 5. *ΑΚ*] *ΚΑ in ras.* V. 6. *ΗΖ*] ΖΗ F. *τῶν ἐν τῷ* ΜΖ] m. 2 V. 7. *τῷ*] (alt.) *ἴσον τῷ* PBFb. ΞΚ] Ξ in ras. V. 8. *τό*]

$\varDelta B > \Xi \varLambda$. est autem $\varDelta \varLambda = \varLambda K$. itaque tota $B\varLambda > \Xi K$. uerum $MZ > B\varLambda$. itaque multo magis $MZ > \Xi K$. et quoniam $\Xi N = N\varLambda = \varLambda K$, et $M\Theta = \Theta H = HZ$, et numerus partium rectae MZ numero partium rectae ΞK aequalis est, erit

$$K\varLambda : ZH = K\Xi : ZM$$

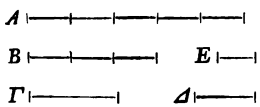
[V, 15]. est autem $ZM > K\Xi$. itaque etiam $HZ > \varLambda K$ [V, 14]. et $ZH = \Gamma$, $K\varLambda = \varLambda\varDelta$. ergo $\Gamma > \varLambda\varDelta$; quod erat demonstrandum.

2.

Ad libr. X prop. 6.

Aliter propositio VI.

Duae enim magnitudines A, B rationem inter se habeant, quam numerus Γ ad numerum $\varDelta$. dico, magnitudines commensurabiles esse.



nam quot sunt in Γ unitates, in totidem partes aequales diuidatur A, et uni earum aequalis sit E. itaque $1 : \Gamma = E : A$ [V, 15]. uerum etiam $\Gamma : \varDelta = A : B$. itaque ex aequo est [V, 22] $1 : \varDelta = E : B$. unitas autem $\varDelta$ metitur. itaque etiam E magnitudinem B metitur. uerum etiam magnitudinem A metitur E, quoniam unitas numerum Γ metitur. itaque E utramque A, B metitur. ergo A, B commensurabiles sunt, et

---

(primum) om. F. $K\Xi$] corr. ex ΞK m. 2 V. 10. $\varLambda\varDelta$] $\varLambda$ V e corr. 12. τό] τὸ αὐτό F. 15. εἰσι F. 18. τὸν A PB. 19. τόν] τό FV, om. b. A] B φ. τό] τόν B. B] A F. 21. τὸν B B. καί] om. FVb. $\varDelta$] m. 2 F, seq. ἀριθμόν corr. ex ἀριθμός. 22. μετρεῖ δέ — ἐπεί] om. PB, ἐμέτρει δὲ καὶ τὸ A, ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ mg. m. 2 B.

μετρεῖ· τὰ Α, Β ἄρα σύμμετρά ἐστιν, καί ἐστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

3.

Ad libr. X prop. 9.

Ἄλλως τὸ θ′.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, [οὕτως] ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτέστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· δι' ἴσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η. ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε, Η τετράγωνος· ὁ μὲν γὰρ Ε

3. Post *ἀριθμόν* p. 32, 3 BFVb, mg. m. 1 P.

1. ἐστιν] (prius) ἐστι BV, comp. Fb. 2. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] *comp. F?, om.* BVb. 3. τὸ θ′] om. B. 5. Γ πρὸς τὸν Δ]

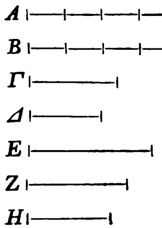
communis earum mensura est E; quod erat demonstrandum.

3.

Ad libr. X prop. 9.

Aliter propositio IX.

Nam quoniam A, B commensurabiles sunt, rationem habent, quam numerus ad numerum [prop. VI]. sit $A : B = \Gamma : \Delta$, et Γ se ipsum multiplicans efficiat E, Γ autem numerum Δ multiplicans Z, Δ autem se ipsum multiplicans H. iam quoniam est $\Gamma \times \Gamma = E$, $\Gamma \times \Delta = Z$, erit $\Gamma : \Delta = E : Z$ [VII, 17], hoc est $E : Z = A : B$. uerum $A : B = A^2 : A \times B$. itaque $A^2 : A \times B = E : Z$. rursus quoniam est $\Delta \times \Delta = H$, $\Gamma \times \Delta = Z$, erit $\Gamma : \Delta = Z : H$ [VII, 17], hoc est $A : B = Z : H$. uerum $A : B = A \times B : B^2$. itaque $A \times B : B^2 = Z : H$. erat autem $A^2 : A \times B = E : Z$. itaque ex aequo [V, 22] $A^2 : B^2 = E : H$. uerum uterque



τρία πρὸς τὸν Δ τέσσαρα F, sed corr. m. 1. 7. ὁ δὲ Γ τόν] τὸν δέ BFVb. ποιείτω] om. BFb. 9. πεποίηκε b. 10. τόν] (prius) corr. ex ὅν m. 1 V. 12. οὕτως] om. P. οὕτως — τὴν B] om. B. 20. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B mg. b. 22. ἀπὸ τῆς A πρὸς τό] m. 2 V (τοῦ pro τῆς). B″, A′ F. Deinde del. m. 2 πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B V. 23. Z] mut. in H F. Post ἄρα add. ἐστίν b, m. 2 F. 25. ἔστιν B.

ἀπὸ τοῦ Γ ἐστιν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα προς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β.

Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε, Ζ, Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, τῶν δὲ Ε, Η ὁ Ζ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α, Β, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β. αἱ Α, Β ἄρα σύμμετροί εἰσιν· λόγον γὰρ ἔχουσιν, ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτέστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ.

4.

Ad libr. X prop. 10.

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ' ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι, οἷον τῇ Α, προσεύρηται δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ, τουτέστι ῥητὴ δυνάμει μόνον

4. Post ἡ Ε p. 34, 5 PBFb; mg. m. 1 V, add. κείμενον.

3. ἀριθμός] comp. corr. ex comp. πρός m. 1 F. 6. Post Β add. μήκει V, m. 2 B. 7. μέν] om. b. ὁ] (prius) ἡ corr. ex ὁ, supra scr. ὁ F; ἡ b. 10. τῶν] corr. ex τό B.

E, H numerus quadratus est; est enim $E = \Gamma^2$, $H = \Delta^2$. ergo $A^2 : B^2$ rationem habet, quam numerus quadratus ad numerum quadratum; quod erat demonstrandum.

Iam uero $A^2 : B^2$ rationem habeat, quam numerus quadratus E ad numerum quadratum H. dico, A et B commensurabiles esse.

sit enim Γ latus numeri E, Δ autem numeri H. et sit $\Gamma \times \Delta = Z$. itaque E, Z, H deinceps proportionales sunt in ratione $\Gamma : \Delta$ [VIII, 11]. et quoniam est $A^2 : A \times B = A \times B : B^2$ et $E : Z = Z : H$, erit $A^2 : A \times B = E : Z$. est autem $A \times B : B^2 = Z : H$ et $A^2 : A \times B = A : B$. ergo A, B commensurabiles sunt; rationem enim habent, quam numerus E ad numerum Z [prop. VI], hoc est $\Gamma : \Delta$. nam $\Gamma : \Delta = E : Z$; est enim $\Gamma \times \Gamma = E$, $\Gamma \times \Delta = Z$ [VII, 17]; quare $\Gamma : \Delta = E : Z$.[1])

4.

Ad libr. X prop. 10.

Ergo ad rectam propositam rationalem, unde diximus mensuras sumi [cfr. p. 2, 10 not. crit.], uelut A, inuenta est Δ potentia commensurabilis, hoc est rationalis potentia tantum commensurabilis, irrationalis

1) Hae ambages, *ὡς δέ* lin. 13 — *H* lin. 14 et *ὡς γάρ* lin. 18 — *τὸν* Z lin. 21, a Gregorio in codd. deesse dicuntur; in meis tamen omnibus leguntur.

11. *ἐστι*] *εἰσιν* P. 16. *εἰσι* V, comp. Fb. *γάρ*] m. 2 F. 17. *ὄν*] om. F. 18. Z] e corr. m. 1 b. 19. Post *Γ* ras. 1 litt. F. *πεποίηκε* V. 21. *οὕτως ὁ E* V. Post Z add. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* FV. 22. *προστεθείσῃ* PV. *ῥητῇ*] *ῥη-* eras., deinde mg. m. rec. *κείμενον*. *προσευρηνται* p. 34, 3 — *ἡ E* p. 34, 5 B addito *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* et deleta reliqua parte propositionis. 23. *οἱονεί* BVb, *γρ. οἷόν ἐστιν ἡ A* mg. Fb. *προσηύρηται* BFb. 24. *μέν*] *μόνον* B, *μὲν ἡ* F.

σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ *E*. ἀλόγους γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους τῇ ῥητῇ.

5.

Uulgo X, 13.

Εἰς τὸ ιγ' λῆμμα ἐκ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾖ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ *A*, *B*, ἄλλο δὲ τὸ *Γ*, καὶ τὸ μὲν *A* τῷ *Γ* σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ *B* τῷ *Γ* ἀσύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ *A* τῷ *B* ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ *A* τῷ *B*, ἔστι δὲ καὶ τὸ *Γ* τῷ *A*, καὶ τὸ *Γ* ἄρα τῷ *B* σύμμετρόν ἐστιν· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

6.

Ad libr. X prop. 18.

Ῥητὰς γὰρ καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἤτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους ἢ καὶ δυνάμει μόνον. εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἳ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθ' ὃ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας

5. Post *δεῖξαι* p. 38, 6 BFVb, mg. m. 2 P. 6. Post *σύμμετρος* p. 58, 3 PBFVb.

1. *σύμμετρος*] om. V, m. rec. P. *δέ*] *γάρ* F. 2. Post *ῥητῇ* eras. *οὕτως* P. 3. *εἰς τὸ ιγ'*] om. FVb. *εἰς — ἀπαγωγῆς*] mg. F, *ιγ'* in ras. B, mg. *ἐν ἄλλῳ λῆμμα*; in F numerus eras. 4. *δύο μεγέθη ᾖ* F. *τῷ αὐτῷ*] postea add. F m. 1. 5. *δ'* *BFb*. 8. *Γ*] (prius) γάμμα F. 11. *ἀσύμμετρον* F, sed *ἀ-* eras. 12. *Γ*] (prius) corr. ex A V. A] corr. ex Γ V.

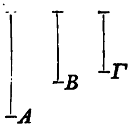
autem E; irrationales enim omnino uocat rectas rationali incommensurabiles et longitudine et potentia.

5.

Uulgo X, 13.

Ad prop. XIII lemma ex reductione in absurdum.

Si duae magnitudines sunt, et altera commensurabilis, altera incommensurabilis eidem magnitudini est, magnitudines incommensurabiles erunt.



sint enim A, B duae magnitudines, alia autem Γ, et A, Γ commensurabiles sint, B, Γ autem incommensurabiles. dico, etiam A, B incommensurabiles esse.

nam si A, B commensurabiles sunt, et etiam Γ, A commensurabiles sunt, etiam Γ, B commensurabiles sunt [prop. XII]; quod contra hypothesin est.

6.

Ad libr. X prop. 18.

Rationales enim uocat rectas rationali propositae commensurabiles aut longitudine et potentia aut potentia tantum. sunt autem aliae[1]) quoque rectae, quae rationali propositae longitudine incommensurabiles sunt, potentia autem tantum commensurabiles; quare rursus uocantur rationales et inter se commensurabiles, quatenus rationales sunt, commensurabiles autem inter se aut longitudine et potentia aut po-

1) Hoc quid sibi uelit, non intellego.

B] *A*? P. ἀσύμμετρον F, sed corr. 15. καὶ] (alt.) om. b.
16. εἰσιν ἀσύμμετροι F. εἰσιν B.

ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὐταὶ ῥηταὶ μήκει σύμμετροι ἐπακουομένου, ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὐταὶ οὕτως ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταί εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα, αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν.

7.

Ad libr. X prop. 20.

Λῆμμα.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον ἄλογός ἐστιν.

Δυνάσθω γὰρ ἡ Α ἄλογον χωρίον, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ. λέγω, ὅτι ἡ Α ἄλογός ἐστιν.

Εἰ γὰρ ἔσται ῥητὴ ἡ Α, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον· οὕτως γάρ [ἐστιν] ἐν τοῖς ὅροις. οὐκ ἔστι δέ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν η Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ad libr. X prop. 23 corollarium.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἳ μήκει μὲν

7. Post ἑξῆς p. 60, 13 PBFVb. 8. Post σύμμετροι p. 68, 22 PV, mg. m 2 B.

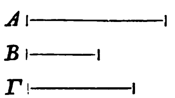
1. καί] (alt.) om. b. 2. ῥηταί] om. V. 3. εἰ] om. b. 5. οὕτως] om. BFVb. Post σύμμετροι del. εἰσιν m. 1 P. ὅτι — 6. εἰσιν] mg. m. 1 P. 6. ἐντεῦθεν] ἐν- in ras. m. 1 P. δῆλον ἐντεῦθεν F. ἐπεί] ὅτι b, mg. m. 1 γρ. ἐπεὶ γὰρ διὰ τὸ βι' τοῦ ι'. 9. εἰσιν] εἰσι b, εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι V. 11. Ἡ] om. V, add. num. β'. ἐστι BV, comp. Fb. 13. ἴσον ἔστω] supra scr. m. 2 V; om. BFb. ἀλόγῳ χωρίῳ] corr. ex ἄλογον ἔστω V, ἄλογον ἔστω Bb, ἔστω ἄλογον F.

tentia tantum. et si longitudine commensurabiles sunt, et ipsae rationales longitudine commensurabiles uocantur, subaudito, eas potentia quoque commensurabiles esse; sin potentia tantum inter se commensurabiles sunt, et ipsae sic rationales potentia tantum commensurabiles uocantur. rationales autem commensurabiles esse, hinc manifestum est: quoniam enim rationales sunt, quae rationali propositae commensurabiles sunt, et quae eidem commensurabilia sunt, etiam inter se commensurabilia sunt [prop. XII], rectae rationales commensurabiles sunt.

7.
Ad libr. X prop. 20.
Lemma.

Recta spatio irrationali aequalis quadrata irrationalis est.

nam A^2 spatio irrationali sit aequale. dico, A irrationalem esse.



nam si A rationalis est, etiam A^2 rationale erit; ita enim in definitionibus est [def. 4]. at non est. ergo A irrationalis est; quod erat demonstrandum.

8.
Ad libr. X prop. 23 coroll.

Sunt autem rursus aliae[1]) quoque rectae, quae

1) Sc. praeter rationales, de quibus u. app. nr. 6.

15. *ἔσται*] *ἐστι* V. 16. *ἐστιν*] om. BFVb. 17. *ἔστιν* B. *ἄρα*] m. 2 F. *ἡ A ἐστιν* BFVb. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. B. 18. *εἰσίν* P. εἰσὶ δέ — p. 386, 7. δυνάμει (prius)] *punctis del.* V (cfr. p. 69 not. crit.).

ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι ἑπομένου τοῦ, ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως δεικτέον. ἐπεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσιν, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα, αἱ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

9.

Ad libr. X prop. 27.

Λῆμμα.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐν λόγῳ ὁποιῳοῦν καὶ ἄλλου τινὸς δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμὸν οὕτως τοῦτον πρὸς ἄλλον τινά.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ AB, $\Gamma\Delta$ λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὁποιονοῦν, ἄλλος δέ τις ὁ ΓE. δεῖ ποιῆσαι τὸ προκείμενον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma$, ΓE παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΔE, καὶ τῷ ΔE ἴσον παρὰ τὸν AB παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ BZ πλάτος ποιοῦν τὴν AZ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΔE

---

9. Post δεῖξαι p. 78, 13 V.

---

1. εἴσιν P. 9. ὅτι — 12. εἰσιν] etiam in mg. sup. m. rec. B. 10. εἰσι BV. 13 λῆμμα] m. 2 V.

mediae longitudine incommensurabiles sunt, potentia autem tantum commensurabiles, et rursus mediae uocantur, quia mediae commensurabiles sunt potentia, et inter se commensurabiles, quatenus mediae sunt, commensurabiles autem inter se aut longitudine et potentia aut potentia tantum. et si longitudine commensurabiles sunt, et ipsae mediae longitudine commensurabiles uocantur, cum per se sequatur, eas potentia quoque commensurabiles esse; sin potentia tantum commensurabiles sunt, sic quoque mediae uocantur potentia tantum commensurabiles.

Medias autem commensurabiles esse, sic demonstrandum: quoniam mediae alicui mediae commensurabiles sunt, et quae eidem commensurabilia sunt, inter se quoque commensurabilia sunt [prop. XII], mediae sunt commensurabiles.

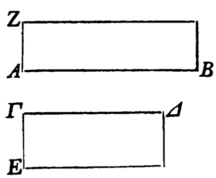
9.

Ad libr. X prop. 27.

Lemma.

Datis duobus numeris in quauis ratione et alio quodam numero oportet efficere, ut sit, ut numerus ad numerum, ita hic ad alium quendam.

Sint AB, $\Gamma\Delta$ numeri dati rationem quamuis inter se habentes, alius autem aliquis ΓE. oportet efficere, quod propositum est.



describatur enim parallelogrammum rectangulum $\Delta E = \Delta\Gamma \times \Gamma E$, et spatio ΔE aequale rectae AB adplicetur parallelogrammum BZ latitudinem efficiens AZ. iam

παραλληλόγραμμον τῷ BZ παραλληλογράμμῳ, ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως ὁ ΓE πρὸς τὸν AZ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

10.

Ad libr. X prop. 29.

Λῆμμα εἰς τὸ κθ'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων καὶ εὐθείας δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμόν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπ' ἄλλης τινός.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B, εὐθεῖα δὲ ἡ Γ, καὶ δέον ἐστὶ ποιῆσαι τὸ προκείμενον. πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Γ, Δ μέση ἀνάλογον ἡ E. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς τὴν Δ, ἀλλ' ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E, ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B, τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E τετράγωνον.

11.

Ad libr. X prop. 31.

Λῆμμα εἰς τὸ λα'.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ AB, $B\Gamma$ ἐν λόγῳ τινί· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ

10. Post prop. XXIX p. 88, 18 V. 11. Post prop. XXXI *p. 92, 24 V.*

4. AB] e corr. V.

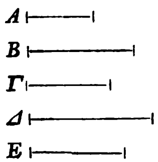
quoniam $\Delta E = BZ$, et eadem aequiangula sunt, et parallelogrammorum aequalium et aequiangulorum latera angulos aequales comprehendentia in contraria proportione sunt [VI, 14], erit $AB : \Gamma\Delta = \Gamma E : AZ$; quod erat demonstrandum.

10.

Ad libr. X prop. 29.

Lemma ad prop. XXIX.

Datis duobus numeris et recta oportet efficere, ut sit, ut numerus ad numerum, ita quadratum rectae ad quadratum alius alicuius rectae.



Sint duo numeri dati A, B, recta autem Γ; et oportet efficere, quod propositum est. fiat enim $A : B = \Gamma : \Delta$ [prop. VI coroll.], et rectarum Γ, Δ media proportionalis sumatur E [VI, 13]. iam quoniam est $A : B = \Gamma : \Delta$, $\Gamma : \Delta = \Gamma^2 : E^2$ [V def. 9], erit $A : B = \Gamma^2 : E^2$.

11.

Ad libr. X prop. 31.

Lemma ad prop. XXXI.

Si duae rectae in ratione aliqua sunt, erit ut recta ad rectam, ita rectangulum duarum rectarum ad quadratum minimae.

Duae igitur rectae AB, $B\Gamma$ in ratione aliqua sint. dico, esse $AB : B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$. describatur

ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. φανερὸν δή, ὅτι ἐστὶν ὡς η ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ὁ ΒΓ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΒΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

12.

Ad libr. X prop. 32.

Λῆμμα εἰς τὸ λβ'.

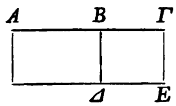
Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ εὐθείᾳ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΚ, διὰ δὲ τῶν Β, Γ, Δ σημείων τῇ ΑΕ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΒ, ΓΘ, ΔΚ. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΒΘ πρὸς τι ΓΚ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς

12. Post prop. XXXII p. 96, 8 V, mg. m. rec. B.

3. Post ΑΔ ins. Γ m. 1 V. 4. ΑΔ] Α eras. V. 7. τῆς] in ras. V. ΒΓ] Γ e corr. V. 12. τὸ ὑπό] in ras. V.



enim in $B\Gamma$ quadratum $B\Delta E\Gamma$, et expleatur parallelogrammum $A\Delta$. manifestum igitur est, esse

$$AB : B\Gamma = A\Delta : BE \text{ [VI, 1]}.$$

et est $A\Delta = AB \times B\Gamma$ (nam $B\Gamma = B\Delta$), $BE = B\Gamma^2$. itaque erit $AB : B\Gamma = AB \times B\Gamma : B\Gamma^2$; quod erat demonstrandum.

12.

Ad libr. X prop. 32.

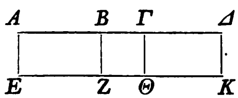
Lemma ad prop. XXXII.

Si tres rectae in ratione aliqua sunt, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum primae ac mediae ad rectangulum mediae ac minimae.

Tres rectae AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ in ratione aliqua sint. dico, esse

$$AB : \Gamma\Delta = AB \times B\Gamma : B\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

ducatur enim ab A puncto ad AB perpendicularis AE, et ponatur $AE = B\Gamma$, et per E punctum rectae $A\Delta$ parallela ducatur EK, per puncta autem B, Γ, Δ rectae AE parallelae ducantur ZB, $\Gamma\Theta$, ΔK. et quoniam est $AB : B\Gamma = AZ : B\Theta$ [VI, 1], et $B\Gamma : \Gamma\Delta = B\Theta : \Gamma K$ [VI, 1], ex aequo erit



τὸ ΓΚ παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΓΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ· ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς ὦσιν εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινί, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ τρίτης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ad libr. X prop. 32 lemma.

Ἢ καὶ ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ· ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. καί ἐστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ.

14.

Ad libr. X prop. 33.

Λῆμμα εἰς τὸ λγ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω, ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ, ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΒΔ

---

13. Inter ΑΓ et ὅπερ p. 98, 15 PBFVb. 14. Post prop. XXXIII p. 102, 4 V, mg. m. rec. B.

---

3. ΓΔ] Δ in ras. V. 5. πρός — 7. δεῖξαι] καὶ ἑξῆς B. *8.* ἤ] *om.* FV. καί] καὶ ἧκται b. 9. συμπληρώσομεν P, *corr. m. 2.* 10. τό] corr. ex. τῷ V. 11. ΕΓ] e corr. V.

$AB : \Gamma\Delta = AZ : \Gamma K$ [V, 22]. et $AZ = AB \times B\Gamma$ (nam $AE = B\Gamma$), $\Gamma K = B\Gamma \times \Gamma\Delta$ (nam $B\Gamma = \Gamma\Theta$). ergo si tres rectae in ratione aliqua sunt, erit ut prima ad tertiam, ita rectangulum primae ac mediae ad rectangulum mediae ac tertiae; quod erat demonstrandum.[1])

13.

Ad libr. X prop. 32 lemma.

Uel etiam quod, si rectangulum $E\Gamma$ descripserimus, et AZ expleuerimus [u. fig. p. 97], erit $E\Gamma = AZ$; nam utrumque $= 2\, AB\Gamma$ [I, 41]. et $E\Gamma = B\Gamma \times A\Delta$, $AZ = BA \times A\Gamma$. ergo est

$$B\Gamma \times A\Delta = BA \times A\Gamma.$$

14.

Ad libr. X prop. 33.

Lemma ad prop. XXXIII.

Si recta in partes inaequales secatur, erit ut recta ad rectam, ita rectangulum totius ac maioris ad rectangulum totius ac minoris.

Recta enim AB in E in partes inaequales secetur. dico, esse

$$AE : EB = BA \times AE : AB \times BE.$$

describatur enim in AB quadratum $A\Gamma\Delta B$, et per punctum E alterutri rectarum $A\Gamma$, $B\Delta$ paral-

1) In B in pag. seq. figura est nostrae similis, nisi quod litterae A, E omissae sunt, et pro B est Θ; adduntur numeri quidam et σχῆμα τοῦ λήμματος τοῦ προγραφέντος, omnia m. rec. in textu prop. 32 (ad καὶ ἐπεί p. 94, 11) signo quodam ad hoc lemma reuocamur.

τό] τῷ b. 12. τῶν] (prius) om. P. τό] (sec.) τῷ b. 14. εἰς τὸ λγ′] πρὸ τοῦ λδ′ postea add. B. 15. ἔσται] in ras. V. 18. τις ἡ] e corr. V m. 2.

παράλληλος ἤχθω ἡ EZ. φανερὸν οὖν, ὅτι ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB, οὕτως τὸ AZ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZB παραλληλόγραμμον. καί ἐστι τὸ μὲν AZ τὸ ὑπὸ τῶν BA, AE· ἴση γὰρ ἡ AΓ τῇ AB· τὸ δὲ ZB τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE· ἴση γὰρ ἡ BΔ τῇ AB. ὡς ἄρα ἡ AE πρὸς τὴν EB, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA, AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, BE· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ad libr. X prop. 34.

Λῆμμα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα, τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ AB, BΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ AB, καὶ τετμήσθω ἡ BΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν AB, BΔ.

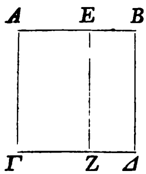
Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B σημείου τῇ BΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ BE, καὶ κείσθω τῇ BA ἴση ἡ BE, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ BZ πρὸς τὸ ΔH, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ BΓ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ BH πρὸς τὸ ΔH· διπλασίων δέ ἐστιν ἡ BΓ τῆς ΔΓ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ BH τοῦ ΔH. καί ἐστι το μὲν BH τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ· ἴση γὰρ ἡ AB τῇ BE· τὸ δὲ ΔH τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΔ· ἴση γὰρ τῇ μὲν BΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ AB ἡ ΔZ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

15. Post prop. XXXIV p. 104, 9 V, mg. m. rec. B (uix legi potest).

---

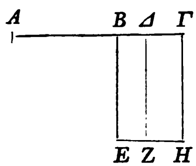
4. ZB] BZ B. 5. τῶν] om. V. *AB*] (prius) e corr. V. *8. λῆμμα προγραφόμενον* B. 19. τήν] om. V. 21. ΔΓ] ΓΔ B.



lela ducatur EZ. manifestum igitur est, esse $AE : EB = AZ : ZB$ [VI, 1]. et $AZ = BA \times AE$ (nam $A\Gamma = AB$), $ZB = AB \times BE$ (nam $\Delta B = AB$). itaque erit $AE : EB = BA \times AE : AB \times BE$; quod erat demonstrandum.

15.
Ad libr. X prop. 34.
Lemma.

Si sunt duae rectae inaequales, et minor in partes aequales secatur, rectangulum duarum rectarum duplo maius erit rectangulo maioris et dimidiae minoris.



Sint duae rectae inaequales AB, $B\Gamma$, quarum maior sit AB, et $B\Gamma$ in duas partes aequales secetur in Δ. dico, esse $AB \times B\Gamma = 2\, AB \times B\Delta$.

ducatur enim a puncto B ad $B\Gamma$ perpendicularis BE, et ponatur $BE = BA$, et describatur figura. iam quoniam est $\Delta B : \Delta\Gamma = BZ : \Delta H$ [VI, 1], componendo [V, 18] erit $B\Gamma : \Delta\Gamma = BH : \Delta H$. uerum $B\Gamma = 2\,\Delta\Gamma$. itaque etiam $BH = 2\,\Delta H$. et $BH = AB \times B\Gamma$ (nam $AB = BE$), $\Delta H = AB \times B\Delta$ (nam $B\Delta = \Delta\Gamma$, $AB = \Delta Z$); quod erat demonstrandum.

16.

Ad libr. X prop. 36.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτην ἐκ δύο ὀνομάτων διὰ τὸ ἐκ δύο ῥητῶν αὐτὴν συγκεῖσθαι κύριον ὄνομα καλῶν τὸ ῥητόν, καθ' ὃ ῥητόν.

17.

Ad libr. X prop. 37.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων πρώτην διὰ τὸ ῥητὸν περιέχειν καὶ προτερεῖν τὸ ῥητόν.

18.

Ad libr. X prop. 38.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν διὰ το μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν καὶ μὴ ῥητόν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστιν, δῆλον. εἰ γὰρ ἔσται ῥητὸν καὶ παραβέβληται παρὰ ῥητήν, εἴη ἂν καὶ ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. ἀλλὰ καὶ ἄλογος· ὅπερ ἄτοπον. τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν.

19.

Ad libr. X prop. 39.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα διὰ το τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσου, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκειότητος

---

16. Inter *ὀνομάτων* et *ὅπερ* p. 108, 15 PBFb. 17. Inter *πρώτη* et *ὅπερ* p. 110, 8 PBFb. 18. Inter *δευτέρα* et *ὅπερ* p. 114, 2 PBFb, pro scholio V m. 1. 19. Inter *μείζων* et *ὅπερ* p. 114, 22 PBFb, mg. V.

---

1. ἐκάλεσεν PBF. 2. ῥητῶν] ὀνομάτων F. *συγκεῖσθαι*] *καλεῖσθαι* F (sed corr. mg.). 4. ἐκάλεσεν PBF. 5. πρω-

16.

Ad libr. X prop. 36.

Uocauit autem eam ex duobus nominibus, quia ex duabus rationalibus composita est, proprie rationale, quatenus rationale est, nomen uocans.

17.

Ad libr. X prop. 37.

Uocauit autem eam ex duabus mediis primam, quia spatium rationale comprehendunt, et rationale principatum habet.

18.

Ad libr. X prop. 38.

Uocauit autem eam ex duabus mediis secundam, quia medium comprehendunt rectangulum, et medium rationali postponitur.

Spatium autem rectis rationali et irrationali comprehensum irrationale esse, adparet. nam si rationale est et rectae rationali adplicatum est, etiam alterum eius latus rationale est [prop. XX]. at idem irrationale est; quod absurdum est. ergo spatium rectis rationali et irrationali comprehensum irrationale est.

19.

Ad libr. X prop. 39.

Uocauit autem eam maiorem, quia rationalia $AB^2 + B\Gamma^2$ maiora sunt medio $2 AB \times B\Gamma$, et

---

τερεύειν F. 6. *ἐκάλεσεν* PBF. *τό*] *τὸ τό* FV. 8. *δέ*] (prius) om. V. 9. *ἐστι* BV, comp. Fb. 11. πλευρὰ αὐτοῦ F. 13. *ἐκάλεσεν* PBF. 15. μέσων PBFb.

τὴν ὀνομασίαν τάττεσθαι. ὅτι δὲ μείζονά ἐστι τὰ ἀπο τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ*, οὕτως δεικτέον.

Φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ *ΑΒ*, *ΒΓ*. εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* τῷ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ*, καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* ῥητόν· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσὶν αἱ *ΑΒ*, *ΒΓ*. ὑποκείσθω μείζων ἡ *ΑΒ*, καὶ κείσθω τῇ *ΒΓ* ἴση ἡ *ΒΔ*· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΔ* ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΔ* καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *ΔΑ*. ἴση δὲ ἡ *ΔΒ* τῇ *ΒΓ*· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* καὶ τῷ ἀπο τῆς *ΑΔ*· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* μείζονα εἶναι τοῦ δὶς υπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* τῷ ἀπὸ *ΔΑ*.

20.

Ad libr. X prop. 40.

Ῥητον δὲ καὶ μέσον δυναμένη καλεῖται αὕτη διὰ τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῥητὸν, τὸ δὲ μέσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ῥητοῦ προύπαρξιν πρῶτον ἐκάλεσεν.

21.

Ad libr. X prop. 41.

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην διὰ το δύνασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ* καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν *ΑΒ*, *ΒΓ*.

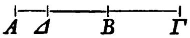
---

20. Inter δυναμένη et ὅπερ p. 116, 13 PBFb, mg. V.
21. Inter δυναμένη et ὅπερ p. 118, 17 PBFVb.

---

1. δέ] δὲ καί P. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 F. 2. οὕτω *BVb*. 3. οὖν] οὖν ἐστιν F. 8. ἀπό] ὑπό V. *ΒΔ*] corr. ex *ΒΓ* V. 9. ἀπό] ὑπό F. τῆς] τῶν F, om. Bb. *ΔΑ*]

oportet nomen a proprietate rationalium dari. esse autem $AB^2 + B\Gamma^2 > 2\, AB \times B\Gamma$, sic demonstrandum est.



iam manifestum est, AB, $B\Gamma$ inaequales esse. nam si aequales essent, esset etiam $AB^2 + B\Gamma^2 = 2\, AB \times B\Gamma$, et $AB \times B\Gamma$ et ipsum rationale esset; quod contra hypothesin est. supponatur $AB > B\Gamma$, et ponatur $B\Delta = B\Gamma$. itaque $AB^2 + B\Delta^2 = 2\, AB \times B\Delta + \Delta A^2$ [II, 7]. uerum $\Delta B = B\Gamma$. itaque

$$AB^2 + B\Gamma^2 = 2\, AB \times B\Gamma + A\Delta^2.$$

ergo $AB^2 + B\Gamma^2$ excedit $2\, AB \times B\Gamma$ quadrato ΔA^2.

20.

Ad libr. X prop. 40.

Spatio autem rationali ac medio aequalis quadrata uocatur haec, quia quadrata duobus spatiis aequalis est, alteri rationali, alteri medio, et propter principatum rationalis primum hoc nominauit.

21.

Ad libr. X prop. 41.

Uocat autem eam duobus spatiis mediis aequalem quadratam, quia duobus spatiis mediis quadrata est aequalis, $AB^2 + B\Gamma^2$ et $2\, AB \times B\Gamma$ [u. fig. p. 119].

$A\Delta$ P. 10. ἀπό] ὑπό F. ἴσα — 12. $A\Delta$] m. 2 V. 11. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 F. 12. τά] τό F. εἶναι] ἐστι BFVb. 13. ἀπό] corr. ex ὑπό m. 2 F. ΔA] τῆς ΔA b et corr. ex τῶν ΔA F. 14. ῥητόν — αὕτη] καλεῖται δὲ αὕτη? V. δυναμένην BFb, et P, corr. m. 2. καλεῖται αὕτη] αὐτὴν καλεῖ BFb. 16. τήν] τόν V. Post πρῶτον add. τὸ ῥητόν BFb, m. rec. P. ἐκάλεσε V. 17. καλεῖ — δυναμένην] om. V. 19. ἀπὸ τῶν] om. V. τό] τοῦ P.

22.

Ad libr. X deff. alt.

Ἐξ οὖν οὐσῶν τῶν οὕτως καταλαμβανομένων εὐθειῶν τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μέν, ἐφ' ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δευτέραν δέ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλασσον, διὰ τὸ πάλιν προτερεῖν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον, τρίτην δέ, ἐφ' ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ. καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τριῶν ὁμοίως τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην καὶ τὴν τρίτην ἕκτην.

23.

Ad libr. X prop. 90.

Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρεσιν τῶν εἰρημένων ἓξ ἀποτομῶν. καὶ δὴ ἔστω εὑρεῖν τὴν πρώτην. ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ $A\Gamma$, ἧς μεῖζον ὄνομα ἡ AB, καὶ τῇ $B\Gamma$ ἴση κείσθω ἡ $B\Delta$. αἱ AB, $B\Gamma$ ἄρα, τουτέστιν αἱ AB, $B\Delta$, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AB τῆς $B\Gamma$, τουτέστι τῆς $B\Delta$, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ,

22. Post ἕκτη p. 136, 19 PBFb; mg. V, sed add. κείμενον.
23. Post δεῖξαι p. 274, 15 PBFVb.

1. οὖν] m. 2 F. οὕτω BFb. 3. Ante συμμέτρου ras. 1 litt. B. 4. τῷ] mut. in τό m. rec. P, corr. ex τό F, τό b. 5. ἀσυμμέτρου] ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ V. ἀσυμμέτρου] συμμέτρου V. 6. πρώτη B, sed corr. m. 1. 7. δεύτερον P, corr. m. rec. 8. ἔλαττον Bb, comp. F. 9. ἐλάττονος Bb, comp. F. τῷ] e corr. V.

22.

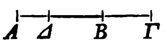
Ad libr. X deff. alt.

Cum igitur rectae ita inuentae sex sint, ordine primas tres ponit, in quibus maior quadrata minorem excedit quadrato rectae sibi commensurabilis, secundas autem ordine tres reliquas, in quibus quadrato rectae sibi incommensurabilis excedit, quia commensurabile antecedit incommensurabile; et praeterea primam, in qua maius nomen rationali propositae commensurabile est, secundam autem, in qua minus, quia rursus maius antecedit minus, quia minus comprehendit; tertiam autem, in qua neutrum nomen rationali propositae commensurabile est. et in sequentibus tribus similiter, primam secundae classis, quam nominauimus, quartam uocans, secundam quintam, tertiam sextam.

23.

Ad libr. X prop. 90.

Licet autem breuius quoque inuentionem sex apotomarum, quas diximus, demonstrare. sit enim propositum primam inuenire. ponatur $A\Gamma$ recta ex duobus nominibus prima, cuius maius nomen sit AB, et ponatur $B\Delta = B\Gamma$. itaque AB, $B\Gamma$, hoc est AB, $B\Delta$, rationales sunt potentia tantum commensurabiles [prop. XXXVI], et AB^2 excedit $B\Gamma^2$, hoc est $B\Delta^2$, quadrato rectae sibi commensurabilis, et AB rationali propositae commensu-



10. ἐστι σύμμετρον BFb. 11. ἐπί] corr. ex ἐπεί V. 14. ϙα′ BVb. ἔστιν B. εὕρησιν FV? 15. ἕξ] om. b. 16. ἡ] (prius) om. PV. 17. ἐκκείσθω V. 18. εἰσιν B.

καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΑΔ. ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὑρήσομεν ἐκθέμενοι τὰς ἰσαριθμοὺς ἐκ δύο ὀνομάτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

24.

Ad libr. X prop. 115.

Ἄλλως.

Ἔστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίγνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή.

Ἤχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· το γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν συμπεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ. καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ μέσης ἄρα ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

24. Post *δεῖξαι* p. 370, 23 PBFVb.

---

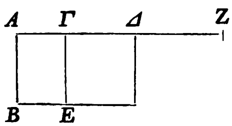
3. *ἐκθέμενοι*] *ν* e corr. P. *τάς*] om. V. *εἰσαριθμούς* B. 4. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BFVb, comp. P. 7. *γίνονται* V. *οὐδεμία*] om. PFV. 8. *ἡ*] ἔστιν ἡ B. 10. ἄλογον] in ras. φ. *ἄλογον* — 11. ΒΓ] mg. m. 1 P. 11. ἐστι PBV,

rabilis est [deff. alt. 1]. ergo $A\Delta$ apotome est prima. similiter igitur reliquas quoque apotomas inueniemus expositis rectis ex duobus nominibus eiusdem numeri; quod erat demonstrandum.

24.
Ad libr. X prop. 115.
Aliter.

Sit $A\Gamma$ media. dico, ab $A\Gamma$ irrationales infinitas numero oriri, et nullam ulli priorum similem esse.

Ducatur AB ad $A\Gamma$ perpendicularis, et rationalis sit AB, et expleatur $B\Gamma$. itaque $B\Gamma$ irrationale est [prop. XX], et recta ei aequalis quadrata irrationalis est. sit $\Gamma\Delta^2 = B\Gamma$. itaque $\Gamma\Delta$ irrationalis est. nec ulli priorum similis est. neque enim ullius priorum quadratum rectae rationali adplicatum latitudinem efficit mediam. rursus expleatur $E\Delta$. itaque $E\Delta$ irrationale est [prop. XX], et recta ei aequalis quadrata irrationalis est. sit $\Delta Z^2 = E\Delta$. itaque ΔZ irrationalis est. nec ulli priorum similis est. neque enim ullius priorum quadratum rationali adplicatum latitudinem efficit $\Gamma\Delta$.



Ergo a media irrationales numero infinitae oriuntur, et nulla ulli priorum similis est; quod erat demonstrandum.

---

comp. Fb. 16. ἐστιν] comp. Fb, ἐστι PBV. 20. ἀπὸ τῆς Bb, τῆς add. m. 2 F. γίγνονται B. οὐδεμία] om. PFVb. 21. οὐδεμίαν φ. ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι] om. BFb.

26.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ *A*, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ *B*· λέγω, ὅτι ἡ *B* μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ *ΓΔ*, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *A* ἴσον παρὰ τὴν *ΓΔ* παραβεβλήσθω τὸ *ΓE* πλάτος ποιοῦν τὴν *ΓZ*· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ *ΓZ*. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *B* ἴσον παρὰ τὴν *ZE* παραβεβλήσθω τὸ *ZH* πλάτος ποιοῦν τὴν *ZΘ*. ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ *A* τῇ *B*, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς *A* τῷ ἀπὸ τῆς *B*. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς *A* ἴσον τὸ *ΓE*, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς *B* ἴσον τὸ *ZH*· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ *ΓE* τῷ *ZH*· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ *ΓZ* τῇ *ZΘ* μήκει. ἀποτομὴ δὲ πέμπτη ἡ *ΓZ*· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ *ZΘ*. ῥητὴ δὲ ἡ *ZE*· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. δύναται δὲ τὸ *ZH* ἡ *B*· ἡ *B* ἄρα ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

26. Alia demonstr. prop. 106, post nr. 25 PFV, mg. m. 1 b, m. 2 B, in V etiam ad prop. 106 mg. m. 1 (V_2).

---

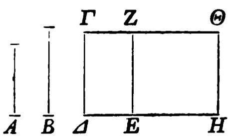
1. ἄλλως τὸ ϱζ′ V_2, ϱιη′ Fb, ϱιθ′ B. ἡ — 3. ἐστιν] om. V_2. 2. Ante μετά add. καὶ αὐτή m. 2 F, καὶ αὐτὴ ἡ b, ἡ F. 4. ἔστω ἡ BFbV_2. 5. καὶ τῇ *A* σύμμετρος ἡ *B* V_2. λέγω — 6. ἐστιν] mg. V_2. 5. ἡ *B*] supra scr. m. 1 F. 9. ἐστίν P. πέμπτη ἐστίν F. 12. *B*] *BΔ* φ. 13. *ΓE*] corr. ex *ZE* V, ZE b. 15. καί] ἐστὶ καί V_2. ZΘ] corr. ex *ΓΘ* V, *ΓΘ* P. 16. πέμπτη] (prius) om. b. ἡ] ἐστὶν ἡ bV_2. 17. ῥητόν P. ῥητὴ δὲ ἡ ZE] om. V_2. 19. ἐστι VbV_2.

26.

Recta rectae cum rationali totum medium efficienti commensurabilis cum rationali totum medium efficiens est.

Sit A recta cum rationali totum medium efficiens, ei autem commensurabilis B. dico, B rectam esse cum rationali totum medium efficientem.

ponatur rationalis $\Gamma\Delta$, et quadrato A^2 aequale rectae $\Gamma\Delta$ adplicetur ΓE latitudinem efficiens ΓZ.



itaque ΓZ apotome est quinta [prop. CI]. quadrato autem B^2 aequale rectae ZE adplicetur ZH latitudinem efficiens $Z\Theta$. iam quoniam A, B commensurabiles sunt, etiam A^2, B^2 commensurabilia sunt. est autem $\Gamma E = A^2$, $ZH = B^2$. itaque ΓE, ZH commensurabilia sunt. quare etiam ΓZ, $Z\Theta$ longitudine commensurabiles sunt [VI, 1; prop. XI]. ΓZ autem apotome est quinta. itaque etiam $Z\Theta$ apotome est quinta [prop. CIII]; ZE autem rationalis est. sin spatium recta rationali et apotome quinta comprehenditur, recta spatio aequalis quadrata recta est cum rationali totum medium efficiens [prop. XCV]. est autem $B^2 = ZH$. ergo B recta est cum rationali totum medium efficiens; quod erat demonstrandum.

---

comp. BF. *δέ*] om. V. 20. *ἡ*] (tert.) P V V_2, om. BFb. 21. *ἐστιν*] supra scr. V_2. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] comp. P, om. BFbV_2. In b add. m. 1: *ὡσαύτως καὶ τούτου τοῦ θεωρήματος ἡ πρότασις ἡ αὐτή ἐστι τῇ τοῦ ρζ', οὐ μὴν ἡ καταγραφὴ καὶ τὸ σχῆμα ἐκείνῳ τὰ αὐτά εἰσιν. ἔστι δὲ ἐν ἑτέρῳ καὶ ριη', διὸ καὶ ἡμῖν παραγέγραπται. εἶτα τὸ ἔνδον ριζ' ἐν ἐκείνῳ ἐστὶ ριθ' καὶ ἑξῆς τὰ λοιπά.*

27.

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω τετράγωνον τὸ *ΑΒΓΔ*, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ *ΑΓ*· λέγω, ὅτι ἡ *ΓΑ* ἀσύμμετρός ἐστι τῇ *ΑΒ* μήκει.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω, ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περισσόν. φανερὸν μὲν οὖν, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΓ* διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς *ΑΒ*. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ *ΓΑ* τῇ *ΑΒ*, ἡ *ΓΑ* ἄρα πρὸς τὴν *ΑΒ* λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. ἐχέτω, ὃν ὁ *ΕΖ* πρὸς *Η*, καὶ ἔστωσαν οἱ *ΕΖ*, *Η* ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ *ΕΖ*. εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ *ΕΖ*, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν *Η*, ὃν ἔχει ἡ *ΑΓ* πρὸς τὴν *ΑΒ*, καὶ μείζων ἡ *ΑΓ* τῆς *ΑΒ*, μείζων ἄρα καὶ ἡ *ΕΖ* τοῦ *Η* ἀριθμοῦ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ *ΕΖ*· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ *ΓΑ* πρὸς τὴν *ΑΒ*, οὕτως ὁ *ΕΖ* πρὸς τὸν *Η*, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς *ΓΑ* πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΒ*, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ *ΕΖ* πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *Η*. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς *ΓΑ* τοῦ ἀπὸ τῆς *ΑΒ*· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ *ΕΖ* τοῦ ἀπὸ τοῦ *Η*· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ *ΕΖ*· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ *ΕΖ* ἄρτιός ἐστιν. εἰ γὰρ ἦν περισσός, καὶ ὁ ἀπ' αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἦν,

---

Post. nr. 26 PBFVb.

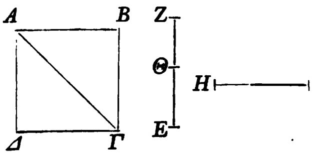
ρις' b, ρκ' B; ρις' corr. in ριθ' m. 2 F. 1. ὅτι] m. 2 B. 2. σύμμετρος F, corr. m. 2. 5. *ΓΑ*] *ΑΓ* FV. σύμμετρος F, corr. m. 2. 7. περιττόν V. 8. ἐστι τοῦ Bb, ἐστι add. *m. 2 F.* 9. τῆς] corr. ex. τοῦ m. 1 b. *ΓΑ*] *ΑΓ* F. 10. *ΓΑ*] *in ras.* V, *ΑΓ* F. ἄρα] om. V. 11. ὅν] in ras. B.

27.

Propositum sit nobis demonstrare, in figuris quadratis diametrum latusque longitudine incommensurabilia esse.

Sit $AB\Gamma\Delta$ quadratum, diametrus autem eius $A\Gamma$. dico, ΓA, AB longitudine incommensurabiles esse.

nam si fieri potest, commensurabiles sint. dico, fore, ut idem numerus et par et impar sit. manifestum igitur, esse $A\Gamma^2 = 2\,AB^2$ [I, 47]. et quoniam ΓA, AB commensurabiles sunt, $\Gamma A : AB$ rationem habet,



quam numerus ad numerum [prop. VI]. sit

$$\Gamma A : AB = EZ : H,$$

et EZ, H minimi sint eorum, qui eandem rationem habent [cfr. VII, 33]. itaque EZ unitas non est. si enim est unitas, et $EZ : H = A\Gamma : AB$, et $A\Gamma > AB$, erit etiam $EZ > H$, unitas numero [V, 14]; quod absurdum est. quare EZ unitas non est. ergo numerus est. et quoniam est $\Gamma A : AB = EZ : H$, erit etiam $\Gamma A^2 : AB^2 = EZ^2 : H^2$ [VI, 20 coroll.; VIII, 11]. uerum $\Gamma A^2 = 2\,AB^2$. itaque etiam $EZ^2 = 2\,H^2$. quare EZ^2 par est. itaque etiam ipse EZ par est. nam si impar esset, etiam quadratum eius impar esset,

---

EZ] E in ras. m. 1 P. τὸν H BFb. 12. H] om. b. 14. ἔχει δέ] καὶ ἔχει BFb. πρός] (prius) comp. corr. ex comp. καί m. 1 F. 16. Post EZ add. μονάς Bb, m. rec. V. 17. ἐστιν] (prius) m. 2 F. ΓA] $A\Gamma$ B. 18. τόν] ο in ras. B. 19. ΓA] Γ in ras. V. AB] B in ras. m. 1 P. 21. τῆς] τοῦ PFV. ἀπὸ τῆς] m. rec. V. τῆς] τοῦ P. διπλάσιον F, διπλάσιος V. ὅ] τό Fb. 22. τοῦ] (primum) τῆς F. 23. ὥστε] -ε e corr. V. 24. ἦν] ἂν ἦν V.

ἐπειδήπερ, ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὁ ὅλος περισσός ἐστιν· ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων [αὐτοῖς], πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η. εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δυὰς ἐμέτρει· πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ· πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἄρα. καὶ ἐπεὶ διπλάσιος ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τοῦ ἀπὸ ΕΘ. διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ ΕΘ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η. ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η· ἀλλὰ καὶ περισσός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως.

[Δεικτέον καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ].

Ἔστω ἀντὶ μὲν τῆς διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν η Α τῇ Β μήκει. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω [σύμμετρος· καὶ γεγονέτω] πάλιν ως ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ ΕΖ, Η· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶτοι πρὸς

---

1. *συντεθῶσι* PFV. 2. ὁ] om. B, *καὶ ὁ* FV. 3. *ἐστιν*] comp. Fb, *ἐστι* PBV. Θ] e corr. B. 4. *Η ἀριθμοί* BFb. *5. αὐτοῖς] om.* P. *εἰσί* PVb, comp. F. *καί*] *καί ἐστιν BFb.* 7. *μετρεῖ* F, corr. m. 2; ἂν ἐμέτρει bene edd. 10. *διπλάσιος]* διπλάσιός ἐστιν F, διπλασίων ἐστίν Bb. 11. ἀπὸ]

quoniam, si numeri impares componuntur, et multitudo eorum impar est, totus impar est [IX, 23]. ergo EZ par est. in Θ in duas partes aequales secetur. et quoniam EZ, H minimi sunt eorum, qui eandem rationem habent, inter se primi sunt [VII, 21]. et EZ par est. itaque H impar est. nam si par esset, binas numeros EZ, H metiretur (omnis enim numerus par partem dimidiam habet [VII def. 6]), qui inter se primi sunt; quod fieri non potest. ergo H par non est. impar igitur est. et quoniam $EZ = 2\,E\Theta$, erit [VIII, 11] $EZ^2 = 4\,E\Theta^2$. est autem $EZ^2 = 2\,H^2$. itaque $H^2 = 2\,E\Theta^2$. quare H^2 par est. itaque propter ea, quae diximus [p. 408, 23 sq.], H par est. at idem impar est; quod fieri non potest. ergo $\Gamma\varDelta$, $\varDelta B$ longitudine commensurabiles non sunt; quod erat demonstrandum.

Aliter.

Sit pro diametro $\varDelta$, pro latere autem B. dico, $\varDelta$ et B longitudine incommensurabiles esse. nam si fieri potest, sit rursus ut $\varDelta : B$, ita numerus EZ ad H [cfr. prop. VI], et EZ, H minimi sint eorum, qui eandem rationem habent [cfr. VII, 33]. itaque EZ, H primi sunt inter se [VII, 21]. primum dico, H unitatem

---

m. 2 F. EZ] τοῦ EZ Bb, m. 2 F. $E\Theta$] τοῦ $E\Theta$ Bbφ. 12. H] (prius) H ἥ b. 13. $E\Theta$] ΘE in ras. V, τοῦ $E\Theta$ BFb. 14. ἐστίν] om. V. 15. $\Gamma\varDelta$] in ras. V, supra scr. $\varDelta$ b. 16. Post μήκει add. ἀσύμμετρος ἄρα (ἄρα m. 2 F) BFb. ὅπερ ἔδει δεῖξαι] comp. P, om. b, οη̄ :∼ B. 17. ἄλλως] om. BFVb, ριζ′ mg. F. 18. δεικτέον — 19. πλευρᾷ] om. P, mg. V. 20. ἔστω γάρ BFb. 22. σύμμετρος· καὶ γεγονέτω] om. PV, m. 2 F. 25. αὐτοῖς] om. Fb, m. 2 B. οἱ] (prius) e corr. V. πρῶτοι] supra scr. m. 1 F.

ἀλλήλους εἰσίν. λέγω πρῶτον, ὅτι ὁ Η οὐκ ἔστι μονάς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. καί ἐστι μονὰς ὁ Η· δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ ΕΖ τετράγωνος· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὶ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ, μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτὴ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοὺς ΕΖ, Η μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

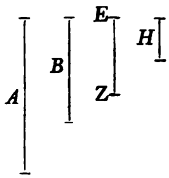
28.

Σχόλιον.

Εὑρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὑρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα, ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ τῶν Α, Β εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς

28. Post. nr. 27 PBFVb.

1. *εἰσί* PVb, comp. F. ὅτι″ πρῶτον b. 3. ὁ] ἡ F. *τόν] τήν* Fb. 4. τό] ὁ P. τό] τόν P. τοῦ] τῆς PV.



non esse. nam si fieri potest, sit unitas. et quoniam est $A:B = EZ:H$, erit etiam $A^2:B^2 = EZ^2:H^2$ [VI, 20 coroll.; VIII, 11]. uerum $A^2 = 2B^2$ [I, 47]. itaque etiam $EZ^2 = 2H^2$. et H unitas est. itaque numerus quadratus EZ^2 binas est; quod fieri non potest. quare H unitas non est; ergo numerus est. et quoniam est $A^2:B^2 = EZ^2:H^2$, et e contrario [V, 7 coroll.] $B^2:A^2 = H^2:EZ^2$, et B^2 metitur A^2, etiam H^2 metitur EZ^2. quare etiam latus ipsum H numerum EZ metitur. uerum H etiam se ipsum metitur. itaque H numeros EZ, H metitur inter se primos; quod fieri non potest. quare A, B longitudine commensurabiles non sunt. ergo incommensurabiles sunt; quod erat demonstrandum.

28.

Scholium.

Inuentis igitur rectis longitudine incommensurabilibus, uelut A, B, etiam plurimae aliae magnitudines duarum dimensionum, scilicet planae, inter se incommensurabiles inueniuntur. nam si inter rectas A, B mediam proportionalem sumpserimus Γ, erit ut A [illegible] ita figura plana in A descripta ad figuram [illegible]

---

6. διπλάσιον P. 7. ὁ ἀπό] [illegible] 10. τό] (prius) supra m. 1 V. [illegible] τοῦ] om. BFb. 13. τό] (alt.) [illegible] 15. αὐτῆς B. 18. [illegible] ἔδει δεῖξαι] comp. F, [illegible] ιη' F), [illegible] δή ὅτι F. [illegible] ὄν] om. BF.

Α ἐπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *Γ* τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγραφόμενα εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια εἴτε κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς *Α*, *Γ*, ἐπείπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. εὕρηνται ἄρα καὶ ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

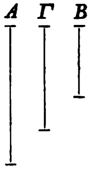
Δεδειγμένων δὴ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων ἀσυμμέτρων χωρίων δείξομεν τοῖς ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν *Α*, *Β* τετραγώνων ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἢ πυραμίδας ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ τὰ στερεά, εἰ δὲ ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν *Α*, *Β* ἐὰν ἀπ᾽ αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κώνους ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὡς οἱ *Α*, *Β* κύκλοι. καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἵ τε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους καὶ

---

1. *ἐπίπεδον*] *εἶδος* BFb. *τῆς*] om. P. *καί*] *τε καί* V. 2. *ἀναγεγραμμένον* BF, mg. b. *ἀναγεγραμμένα* BFb. 3. *εἴτε*] (prius) *εἴτε καί* P. 4. *ἐπεὶ γάρ*, supra scr. *περ* m. 1 F. Mg. *μαθήσῃ τοῦτο ἐν τῷ β′ τοῦ ιβ′ ἐν τοῖς στερεοῖς* m. rec. B. 6. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] :∼ BFb, et P, sed supra scr. m. 1 comp. 8. *ρκβ′* B. 9. *χωρίων ἀσυμμέτρων* B. *τοῖς*] *ἐν τοῖς* Vb. 11. *ἀπὸ τῶν*] om. F. 12. *ἀναστήσω* V, deinde supra scr. *αὐτοῖς* m. 1. 13. *ἰσουψῆ*] *ἰ*- in ras. m. 1 B. *ἰσουψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα*] mg. V, in textu del. *ἰσουψῆ γραμμὰς ἢ παραλληλεπίπεδα. παραλληλοεπίπεδα* F, *παράλληλα ἐπίπεδα* b. *ἢ*] e corr. F; *οἷον*, supra scr. *ἢ* m. 1 b. 14. *ὡς*] postea ins. m.

milem et similiter descriptam [VI, 19 coroll.], siue quadrata sunt figurae descriptae siue aliae rectilineae similes siue circuli circum diametros *A*, *Γ*, quoniam circuli eam inter se rationem habent, quam quadrata diametrorum [XII, 2]. ergo etiam plana spatia inter se incommensurabilia inuenta sunt; quod erat demonstrandum.



Inuentis iam spatiis quoque diuersis duarum dimensionum incommensurabilibus per ea, quae ad theoriam solidorum pertinent, demonstrabimus, solida quoque esse inter se commensurabilia et incommensurabilia. si enim in quadratis rectarum *A*, *B* uel figuris rectilineis iis aequalibus solida construxerimus eiusdem altitudinis uel parallelepipeda uel pyramidas uel prismata, solida constructa eam inter se rationem habebunt, quam bases [XI, 32. XII, 5; 6]. et si bases commensurabiles sunt, etiam solida commensurabilia erunt, sin incommensurabiles, incommensurabilia [prop. XI]; quod erat demonstrandum.

praeterea si *A*, *B* duo circuli sunt, si in iis conos uel cylindros eiusdem altitudinis construxerimus, eam inter se rationem habebunt, quam bases, hoc est quam circuli *A*, *B* [XII, 11]. et si circuli commensurabiles sunt, etiam coni cylindrique inter se commensurabiles

---

1 V. 16. *ἀσύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις* V. 17. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*] om. BFb. 18. *ρκγ´* B. *κύκλων*] in ras. V. 20. *ὡς*] om. P, m. 2 V. Post alt. *ὡς* ras. 3 litt. V. 21. *εἰσιν*] *εἶεν* V. 22. *καί*] om. B. *τε*] om. b. *πρὸς ἀλλήλους*] *ἀλλήλοις* BFb.

οἱ κύλινδροι, εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγονεν, ὅτι οὐ μόνον ἐπὶ γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστι συμμετρία τε καὶ ἀσυμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

1. *δέ*] *δ'* F. *εἰσιν*] *εἶεν* b. 3. *γέγονε* V. *ὅτι*] *δι' ὅ* PV. *ἐπί*] *ἐπί τε* P. 4. *καί*] *ἤ* P. *ἐστιν σύμμετρα* P. *ἀσύμμετρα* P. Mg. *γρ. σύμμετρα καὶ ἀσύμμετρα* m. 1 b. 5. *στερεῶν*] *ἑτέρων* F.

erunt, sin incommensurabiles sunt circuli, etiam coni cylindrique incommensurabiles erunt [prop. XI]. et nobis adparuit, commensurabilitatem incommensurabilitatemque non solum in lineis planisque esse, sed etiam in corporibus solidis.

Aus Natur und Geisteswe

Sammlung wissenschaftlich-gemeinverständlicher Da
allen Gebieten des Wissens.